

第5章 自适应模糊控制

模糊控制的突出优点是能够比较容易地将人的控制经验溶入到控制器中，但若缺乏这样的控制经验，很难设计出高水平的模糊控制器。而且，由于模糊控制器采用了IF-THRN控制规则，不便于控制参数的学习和调整，使得构造具有自适应的模糊控制器较困难。

自适应模糊控制是指具有自适应学习算法的模糊逻辑系统，其学习算法是依靠数据信息来调整模糊逻辑系统的参数。一个自适应模糊控制器可以用一个单一的自适应模糊系统构成，也可以用若干个自适应模糊系统构成。与传统的自适应控制相比，自适应模糊控制的优越性在于它可以利用操作人员提供的语言性模糊信息，而传统的自适应控制则不能。这一点对具有高度不确定因素的系统尤其重要。

自适应模糊控制有两种不同的形式：

(1) 直接自适应模糊控制：根据实际系统性能与理想性能之间的偏差，通过一定的方法来直接调整控制器的参数；

(2) 间接自适应模糊控制：通过在线辨识获得控制对象的模型，然后根据所得模型在线设计模糊控制器。

5.1 模糊逼近

5.1.1 模糊系统的设计

设二维模糊系统 $g(x)$ 为集合 $U = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \subset R^2$ 上的一个函数，其解析式形式未知。假设对任意一个 $x \in U$ ，都能得到 $g(x)$ ，则可设计一个逼近的模糊系统。模糊系统的设计步骤为：

步骤1：在 $[\alpha_i, \beta_i]$ 上定义 $N_i (i=1, 2)$ 个标准的、一致的和完备的模糊集。

$$A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^{N_i}$$

步骤2: 组建 $M = N_1 \times N_2$ 条模糊集IF-THEN规则:

$R_{u}^{i_1 i_2}$: 如果 x_1 为 $A_1^{i_1}$ 且 x_2 为 $A_2^{i_2}$, 则 y 为 $B^{i_1 i_2}$

其中, $i_1 = 1, 2, \dots, N_1$, $i_2 = 1, 2, \dots, N_2$

将模糊集 $B^{i_1 i_2}$ 的中心 (用 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 表示) 选择为

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) \quad (5.1)$$

步骤3：采用乘机推理机，单值模糊器和中心平均解模糊器，根据 $M = N_1 \times N_2$ 条规则来构造模糊系统 $f(x)$

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} (\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2))}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2))} \quad (5.2)$$

5.1.2 模糊系统的逼近精度

万能逼近定理表明模糊系统是除多项函数逼近器、神经网络之外的一个新的万能逼近器。模糊系统较之其它逼近器的优势在于它能够有效地利用语言信息的能力。万能逼近定理是模糊逻辑系统用于非线性系统建模的理论基础，同时也从根本上解释了模糊系统在实际中得到成功应用的原因。

万能逼近定理 令 $f(x)$ 为式 (5.2) 中的二维模糊系统, $g(x)$ 为式 (5.1) 中的未知函数, 如果 $g(x)$ 在 $U=[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ 上是连续可微的, 模糊系统的逼近精度为:

$$\|g - f\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} h_2 \quad (5.3)$$

$$h_i = \max_{1 \leq j \leq N_i - 1} |e_i^{j+1} - e_i^j| \quad (i = 1, 2) \quad (5.4)$$

式中, 无穷维范数 $\|*\|_{\infty}$ 定义为 $\|d(x)\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |d(x)|$ 。

由(5.4)式可知：假设 x_i 的模糊集的个数为 N_i ，其变化范围的长度为 L_i ，则模糊系统的逼近精度满足

$$N_i = \frac{L_i}{h_i} + 1$$

即：

$$h_i = \frac{L_i}{N_i - 1}$$

由该定理可得到以下结论：

(1) 形如式 (5.2) 的模糊系统是万能逼近器, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都可将 h_1 和 h_2 选得足够小, 使 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} h_1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} h_2 < \varepsilon$ 成立, 从而保证 $\sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| = \|g - f\|_{\infty} < \varepsilon$ 。

(2) 通过对每个 x_i 定义更多的模糊集可以得到更为准确的逼近器, 即规则越多, 所产生的模糊系统越有效。

(3) 为了设计具有预定精度的模糊系统, 必须知道 $g(x)$ 关于 x_1 和 x_2 的导数边界, 即 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty}$ 和 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty}$ 。同时, 在设计过程中, 还必须知道 $g(x)$ 在 $x = (e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$ ($i_1 = 1, 2, \dots, N_1, i_2 = 1, 2, \dots, N_2$) 处的值。

5.1.3 仿真实例

实例1 针对一维函数 $g(x)$ ，设计一个模糊系统 $f(x)$ ，使之一致的逼近定义在 $U=[-3, 3]$ 上的连续函数 $g(x)=\sin(x)$ ，所需精度为 $\varepsilon=0.2$ ，即 $\sup_{x \in U} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$ 。

由于 $\left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\infty} = \|\cos(x)\|_{\infty} = 1$ ，由式 (5.3) 可知， $\|g-f\|_{\infty} \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{\infty} h = h$ ，故取 $h \leq 0.2$ 满足精度要求。取 $h = 0.2$ ，则模糊集的个数为 $N = \frac{L}{h} + 1 = 31$ 。在 $U = [-3, 3]$ 上定义 31 个具有三角形隶属函数的模糊集 A^j ，如图 5-1 所示。所设计的模糊系统为：

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^{31} \sin(e^j) \mu_A^j(x)}{\sum_{j=1}^{31} \mu_A^j(x)}$$

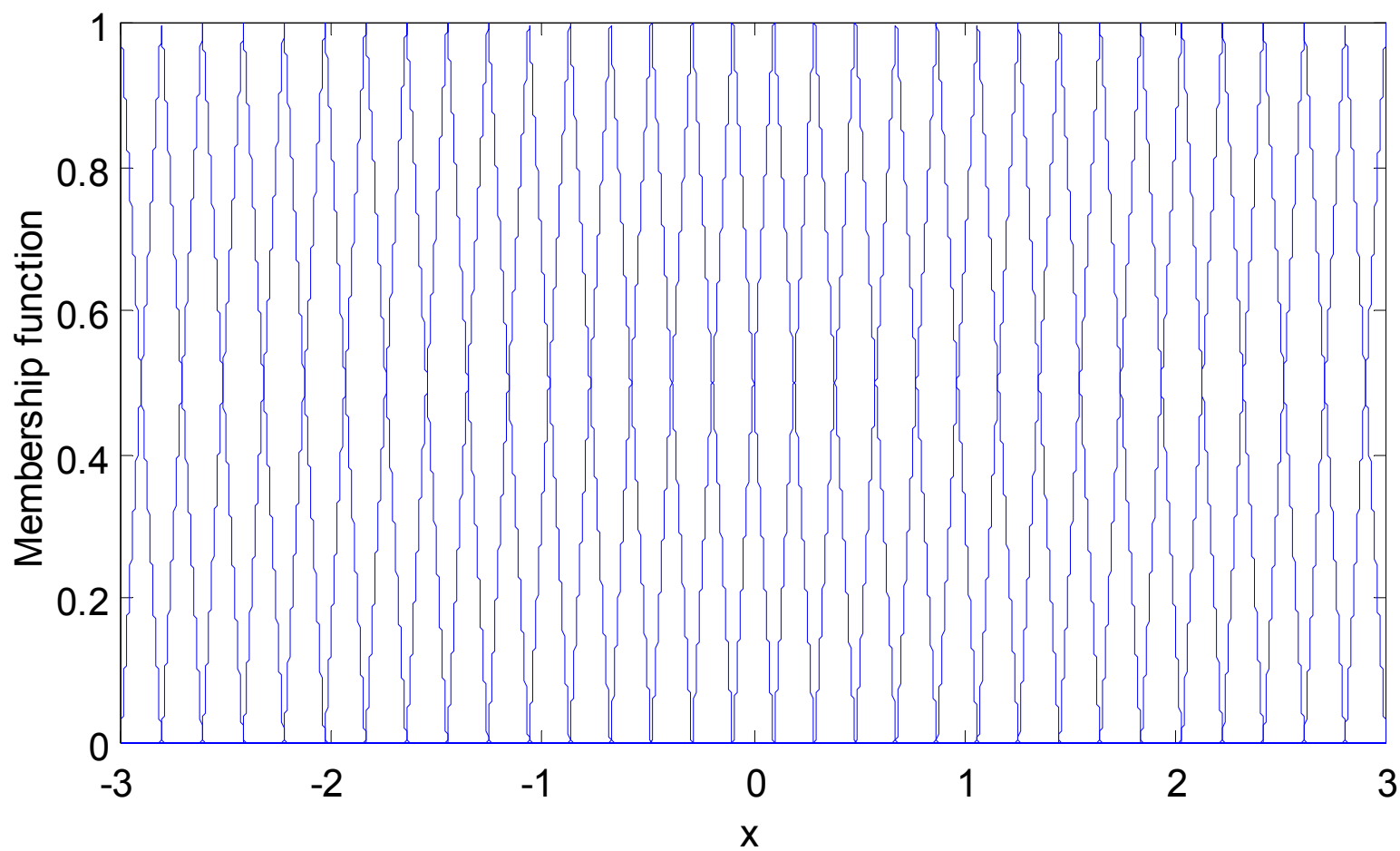


图5-1 隶属函数

一维函数逼近仿真程序见chap5_1.m。逼近效果如图5-2和5-3所示：

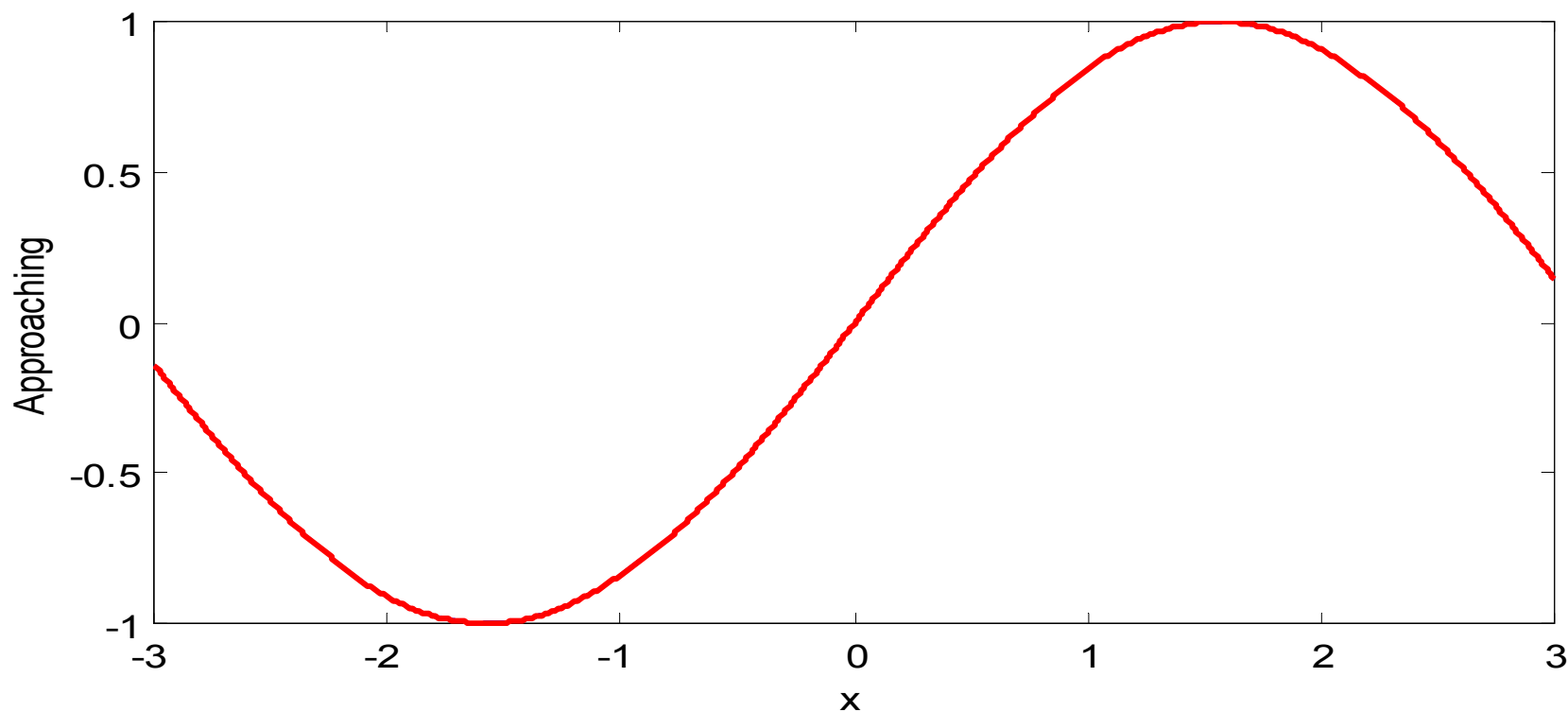


图5-2 模糊逼近

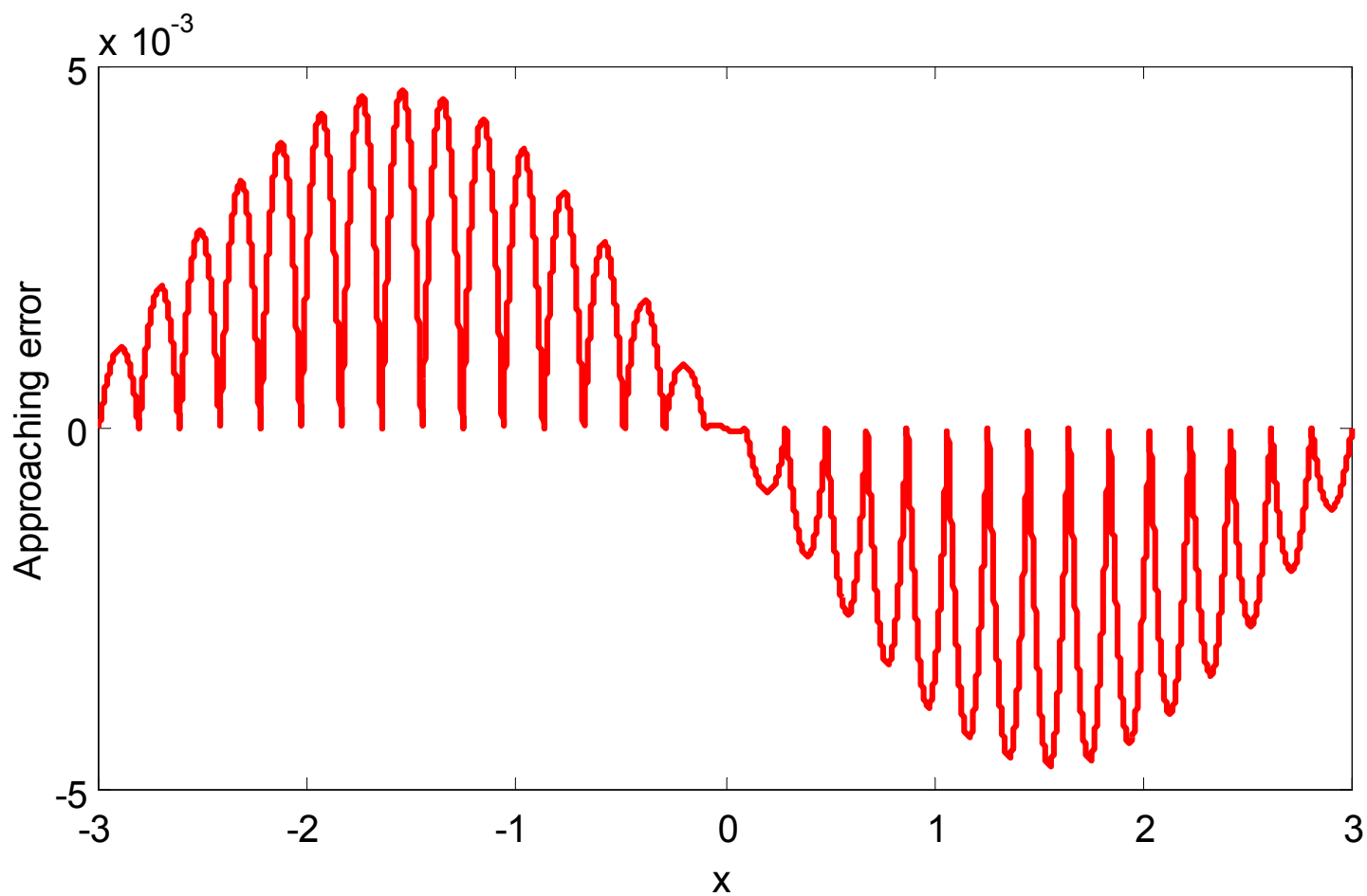


图5-3 逼近误差

实例2 针对二维函数 $g(x)$ ，设计一个模糊系统 $f(x)$ ，使之一致的逼近定义在 $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 上的连续函数

$$g(x) = 0.52 + 0.1x_1 + 0.28x_2 - 0.06x_1x_2$$

所需精度为 $\varepsilon = 0.1$ 。

$$\text{由于} \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |0.1 - 0.06 x_2| = 0.16, \left\| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |0.28 - 0.06 x_1| = 0.34$$

由式 (5.3) 可知, 取 $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.2$ 时, 有

$$\|g - f\| \leq 0.16 \times 0.2 + 0.34 \times 0.2 = 0.1$$

满足精度要求。由于 $L = 2$, 此时模糊集的个数为 $N = \frac{L}{h} + 1 = 11$
 即 x_1 和 x_2 分别在 $U = [-1, 1]$ 上定义 11 个具有三角形隶属函数的模糊集 A^j 。

所设计的模糊系统为：

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} g(e^{i_1}, e^{i_2}) \mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)}{\sum_{i_1=1}^{11} \sum_{i_2=1}^{11} \mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2)} \quad (5.6)$$

该模糊系统由 $11 \times 11 = 121$ 条规则来逼近函数 $g(x)$

二维函数逼近仿真程序见chap5_2.m。 x_1 和 x_2 的隶属函数及 $g(x)$ 的逼近效果如图5-4至5-7所示。

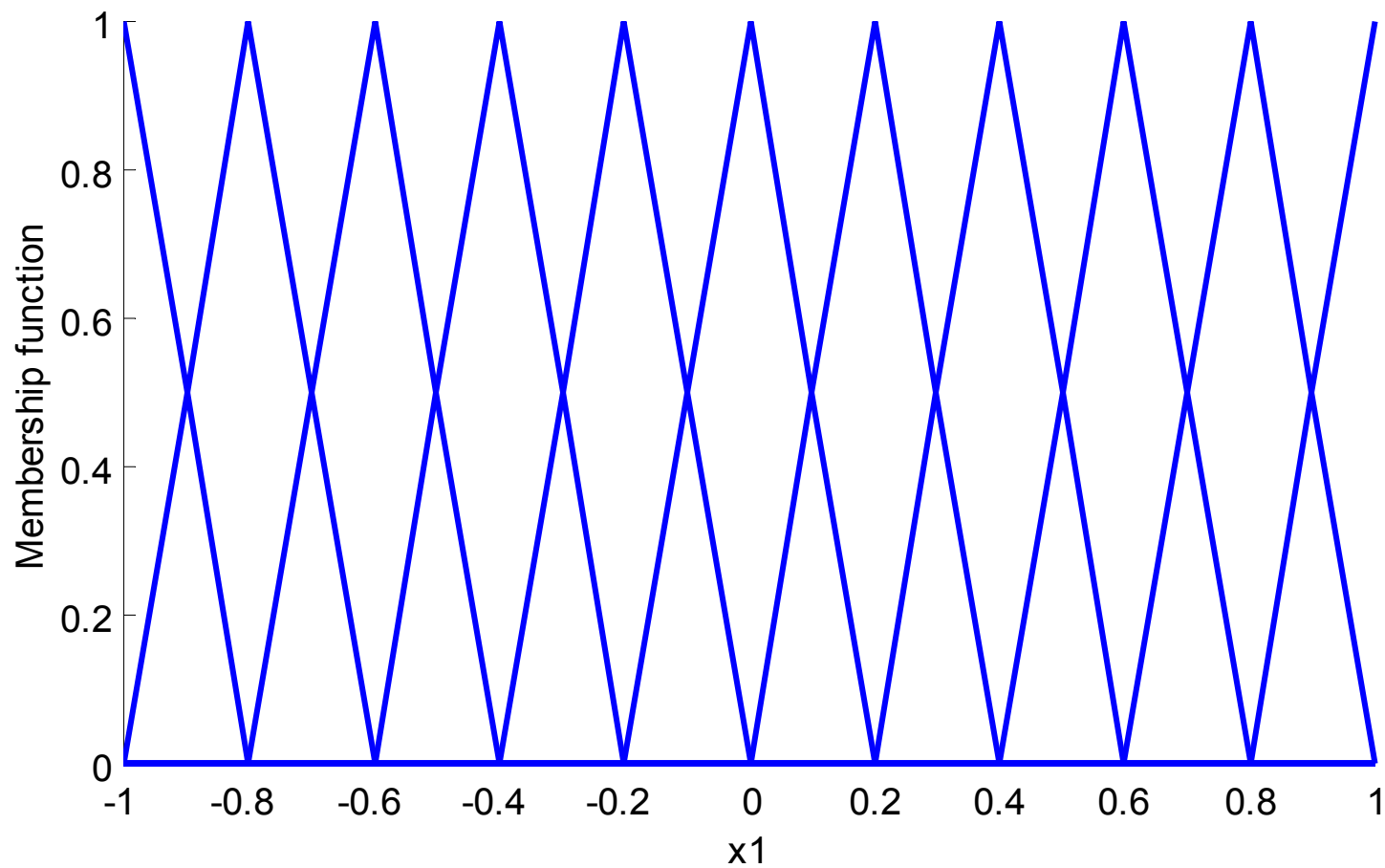


图5-4 x_1 的隶属函数

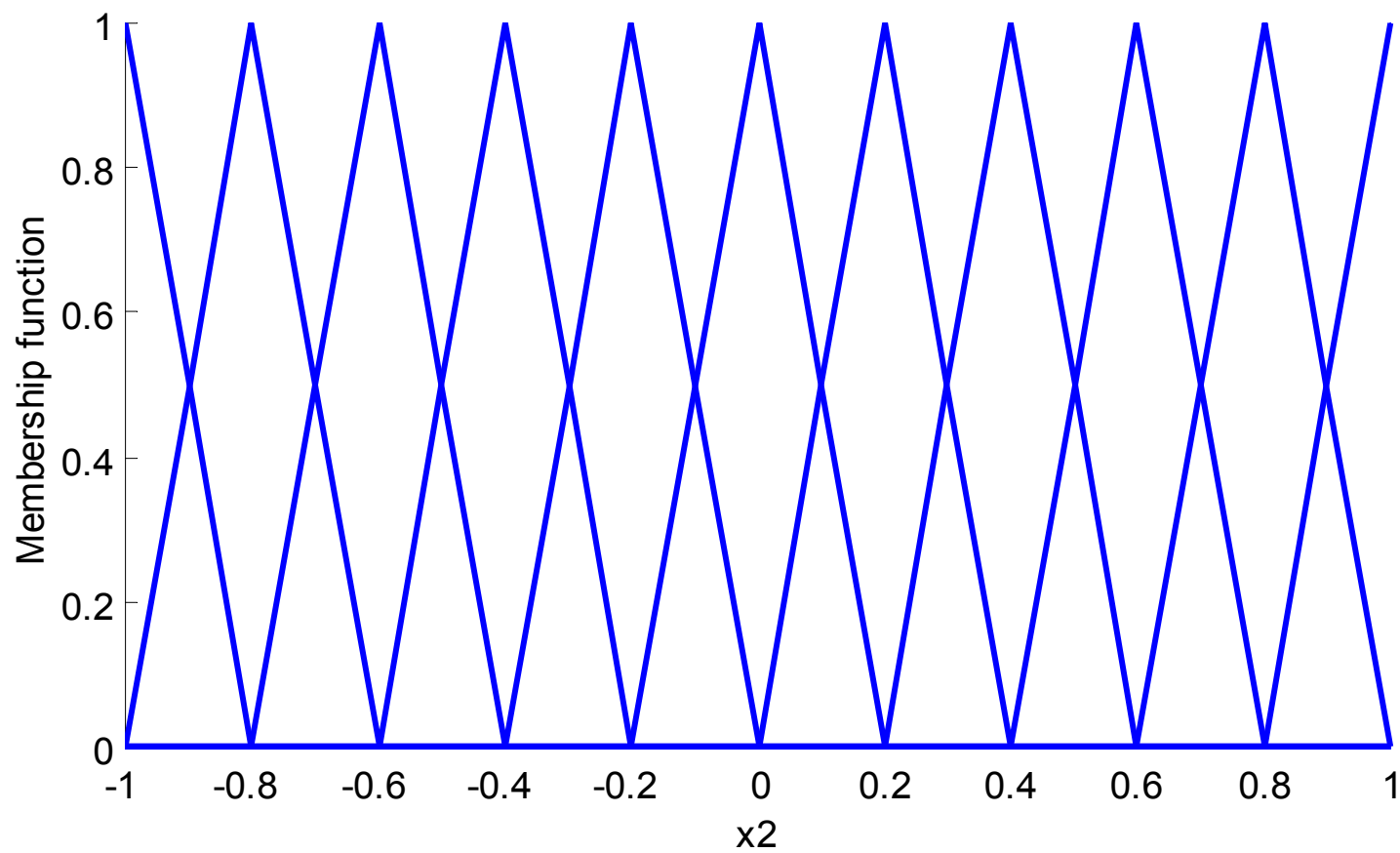


图5-5 x_2 的隶属函数

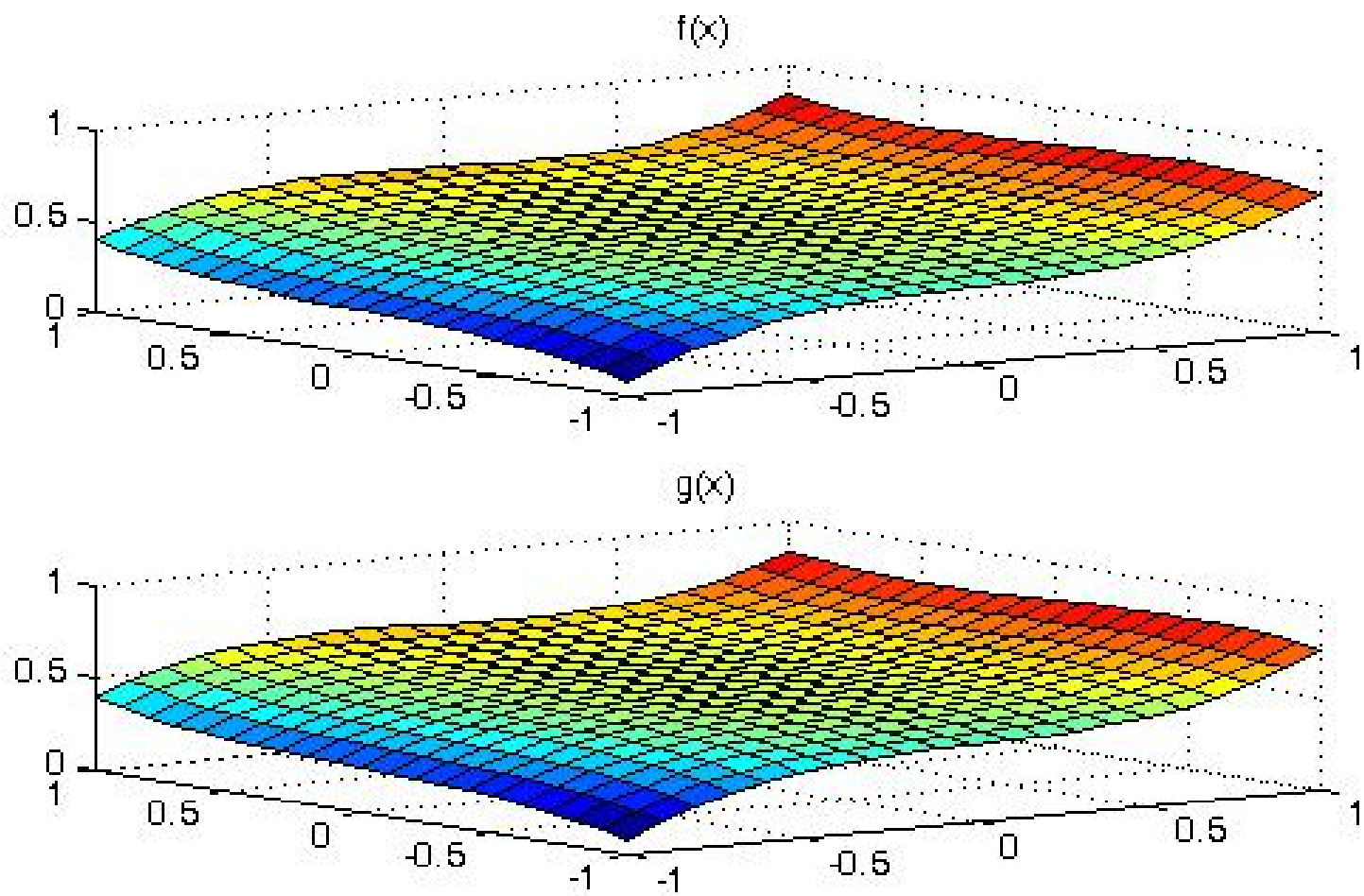


图5-6 模糊逼近

Approaching error

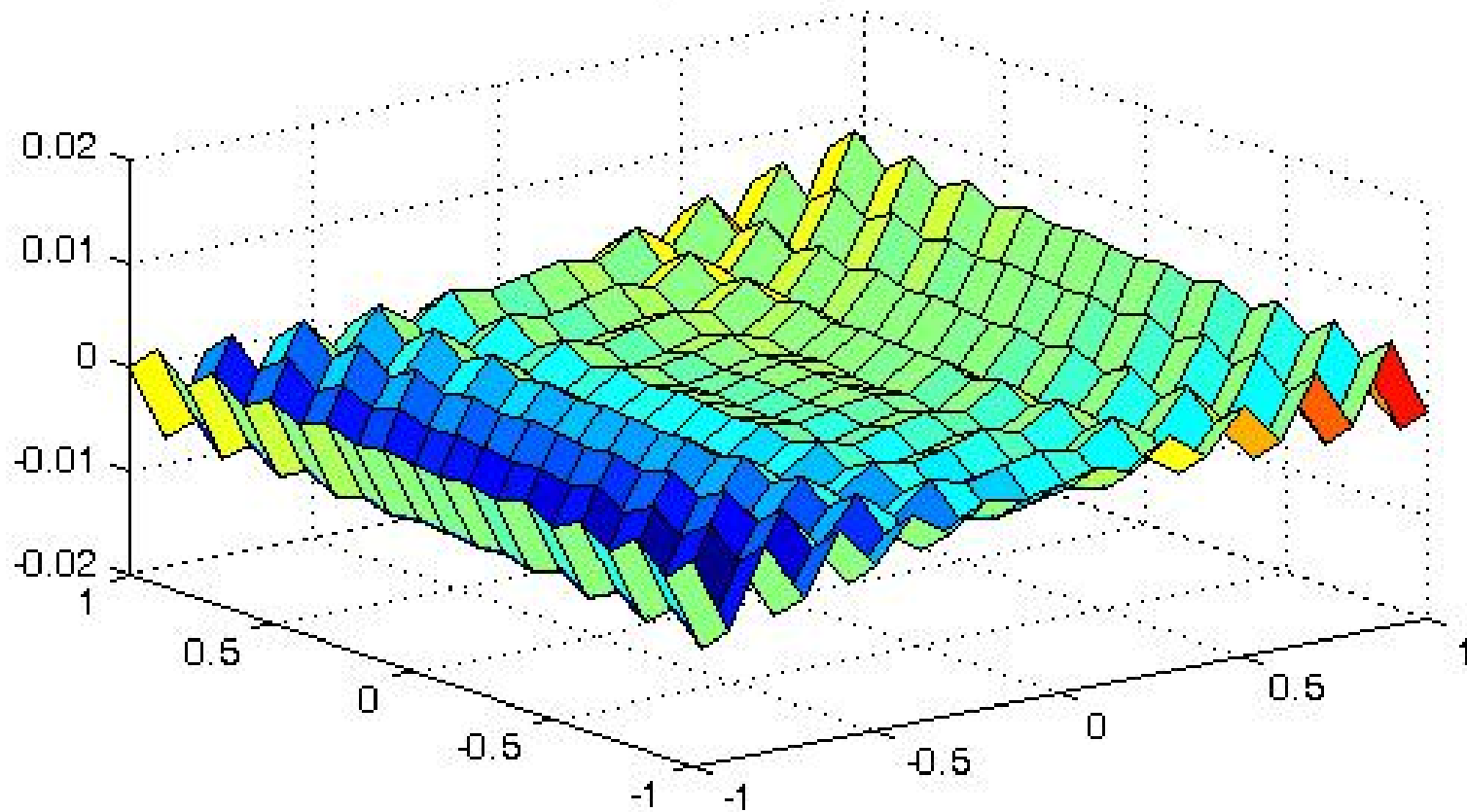


图5-7 逼近误差

5.2 间接自适应模糊控制

5.2.1 问题描述

考虑如下 n 阶非线性系统：

$$\dot{x}^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \quad (5.7)$$

其中 f 和 g 为未知非线性函数, $u \in R^n$ 和 $y \in R^n$ 分别为系统的输入和输出。

设位置指令为 y_m , 令

$$\begin{aligned} e &= y_m - y = y_m - x \\ \mathbf{e} &= (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T \end{aligned} \quad (5.8)$$

选择 $\mathbf{k} = (k_n, \dots, k_1)^T$, 使多项式 $s^n + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$ 的所有根部都在复平面左半开平面上。

取控制律为

$$u^* = \frac{1}{g(\mathbf{x})} [-f(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e}] \quad (5.9)$$

将 (5.9) 代入 (5.7), 得到闭环控制系统的方程:

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (5.10)$$

由 \mathbf{K} 的选取, 可得 $t \rightarrow \infty$ 时 $e(t) \rightarrow 0$, 即系统的输出 y 渐进地收敛于理想输出 y_m 。

如果非线性函数 $g(\mathbf{x})$ 和 $f(\mathbf{x})$ 是已知的，则可以选择控制 u 来消除其非线性的性质，然后再根据线性控制理论设计控制器。

5.2.2 控制器的设计

如果 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 未知，控制律 (5.9) 很难实现。可采用模糊系统 $\hat{f}(\mathbf{x})$ 和 $\hat{g}(\mathbf{x})$ 代替 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ ，实现自适应模糊控制。

1. 基本的模糊系统

以 $\hat{f}(x|\theta_f)$ 来逼近 $f(\mathbf{x})$ 为例，可用两步构造模糊系统：

步骤1：对变量 x_i ($i=1,2,\dots,n$)，定义 p_i 个模糊集合 $A_i^{l_i}$ ($l_i=1,2,\dots,p_i$)。

步骤2：采用以下 $\prod_{i=1}^n p_i$ 条模糊规则来构造模糊系统：

$$\begin{aligned} R^{(j)} : \quad & \text{IF } x_i \text{ is } A_i^{l_i} \quad \dots \text{ AND } \quad x_n \text{ is } A_n^{l_n} \\ & \text{THEN } \hat{f} \text{ is } E^{l_1 \dots l_n} \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 $l_i=1,2,\dots,p_i$ ， $i=1,2,\dots,n$ 。

采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器，
则模糊系统的输出为

$$\hat{f}(x \mid \theta_f) = \frac{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \bar{y}_f^{l_1 \cdots l_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (5.12)$$

其中 $\mu_{A_i^j}(x_i)$ 为 x_i 的隶属函数。

令 $\bar{y}_f^{l_1 \cdots l_n}$ 是自由参数，放在集合 $\theta_f \in R^{\prod_{i=1}^n p_i}$ 中。引入向量 $\xi(x)$ ，(5.12)式变为

$$\hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \quad (5.13)$$

其中 $\xi(x)$ 为 $\prod_{i=1}^n p_i$ 维向量，其第 $l_1 \cdots, l_n$ 个元素为

$$\xi_{l_1 \cdots l_n}(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (5.14)$$

2. 自适应模糊滑模控制器的设计

采用模糊系统逼近 f 和 g ，则控制律 (5.9) 变为

$$u = \frac{1}{\hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g)} \left[-\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e} \right] \quad (5.15)$$

$$\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) = \theta_f^T \xi(\mathbf{x}), \quad \hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g) = \theta_g^T \xi(\mathbf{x}) \quad (5.16)$$

其中 $\xi(\mathbf{x})$ 为模糊向量，参数 θ_f^T 和 θ_g^T 根据自适应律而变化。

设计自适应律为：

$$\dot{\theta}_f = -\gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \xi(\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

$$\dot{\theta}_g = -\gamma_2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \eta(\mathbf{x}) u \quad (5.18)$$

自适应模糊控制系统如图5-8所示。

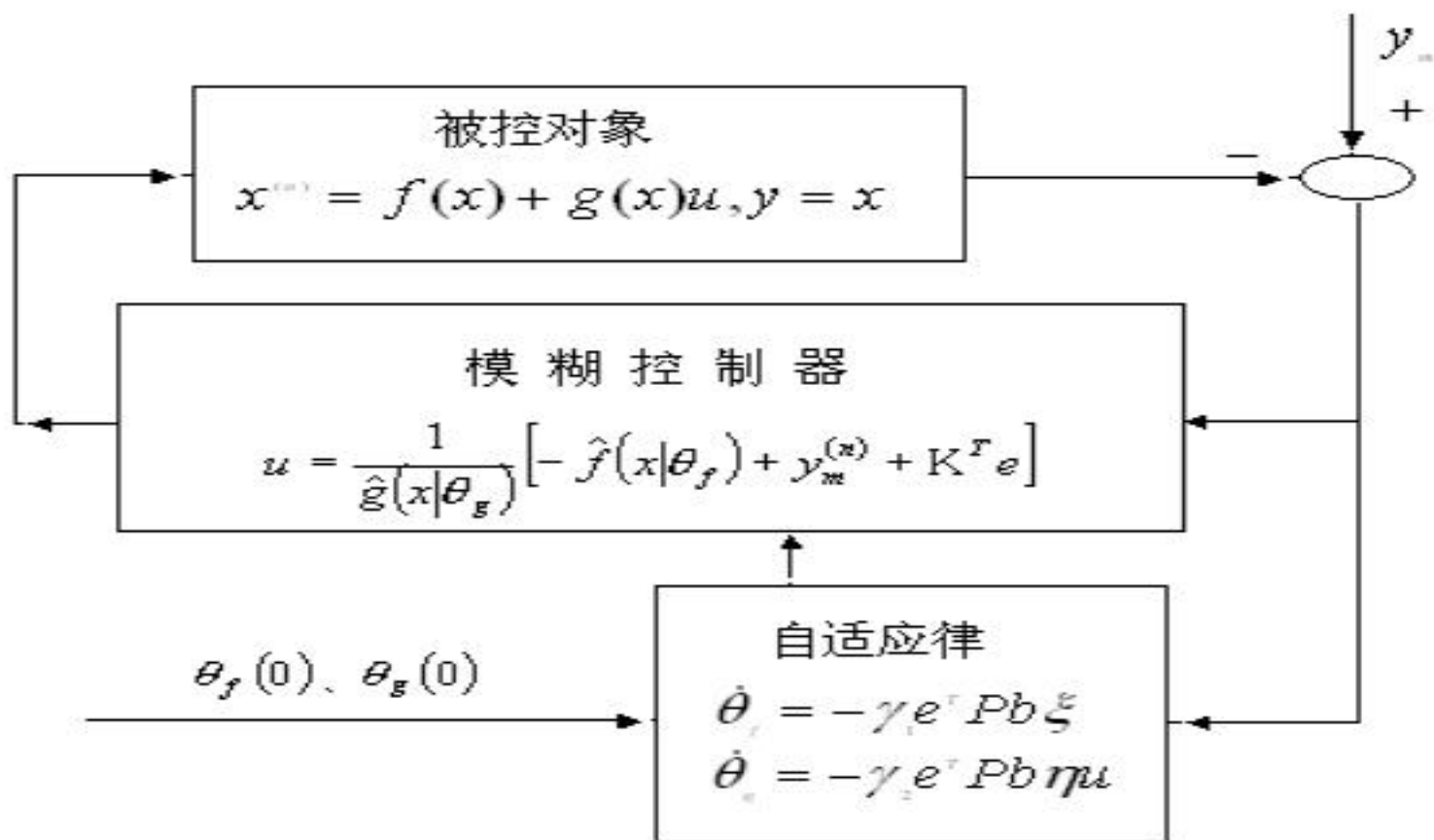


图5-8 自适应模糊控制系统

3. 稳定性分析

由式 (5.15) 代入式 (5.7) 可得如下模糊控制系统的闭环动态

$$\mathbf{e}^{(n)} = -\mathbf{K}^T \mathbf{e} + [\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) - f(\mathbf{x})] + [\hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g) - g(\mathbf{x})]u \quad (5.19)$$

令：

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

则动态方程 (5.19) 可写为向量形式:

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left\{ \left[\hat{f}(\mathbf{x}|\theta_f) - f(\mathbf{x}) \right] + \left[\hat{g}(\mathbf{x}|\theta_g) - g(\mathbf{x}) \right] u \right\} \quad (5.21)$$

设最优参数为

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left[\sup_{x \in R^n} \left| \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - f(\mathbf{x}) \right| \right] \quad (5.22)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left[\sup_{x \in R^n} \left| \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - g(\mathbf{x}) \right| \right] \quad (5.23)$$

其中 Ω_f 和 Ω_g 分别为 θ_f 和 θ_g 的集合。

定义最小逼近误差为

$$\omega = \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f^*) - f(\mathbf{x}) + (\hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g^*) - g(\mathbf{x}))u \quad (5.24)$$

式 (5.21) 可写为:

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left[(\theta_f - \theta_f^*)^T \xi(\mathbf{x}) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \eta(\mathbf{x})u + \omega \right] \quad (5.25)$$

将式 (5.16) 代入式 (5.25), 可得闭环动态方程:

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} \left\{ [\hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f) - \hat{f}(\mathbf{x} | \theta_f^*)] + [\hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g) - \hat{g}(\mathbf{x} | \theta_g^*)]u + \omega \right\} \quad (5.26)$$

该方程清晰地描述了跟踪误差和控制参数 θ_f 、 θ_g 之间的关系。自适应律的任务是为 θ_f 、 θ_g 确定一个调节机理, 使得跟踪误差 \mathbf{e} 和参数误差 $\theta_f - \theta_f^*$ 、 $\theta_g - \theta_g^*$ 达到最小。

定义Lyapunov函数

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T (\theta_f - \theta_f^*) + \frac{1}{2\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T (\theta_g - \theta_g^*) \quad (5.27)$$

式中 γ_1, γ_2 是正常数, \mathbf{P} 为一个正定矩阵且满足 Lyapunov 方程

$$\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} = -\mathbf{Q} \quad (5.28)$$

其中 \mathbf{Q} 是一个任意的 $n \times n$ 正定矩阵, $\mathbf{\Lambda}$ 由式 (5.20) 给出。

取 $V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$, $V_2 = \frac{1}{2\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T (\theta_f - \theta_f^*)$, $V_3 = \frac{1}{2\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T (\theta_g - \theta_g^*)$

令 $M = b \left[(\theta_f - \theta_f^*)^T \xi(x) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \eta(x) u + \omega \right]$,

则 (5.26) 式变为:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + M$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda}^T + M^T) \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + M) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} (M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M) = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \omega + (\theta_f - \theta_f^*)^T \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \xi(x) + (\theta_g - \theta_g^*)^T \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \eta(x)u$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T \dot{\theta}_f$$

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T \dot{\theta}_g$$

V 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \omega + \frac{1}{\gamma_1} (\theta_f - \theta_f^*)^T [\dot{\theta}_f + \gamma_1 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \xi(\mathbf{x})] \\ & + \frac{1}{\gamma_2} (\theta_g - \theta_g^*)^T [\dot{\theta}_g + \gamma_2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \eta(\mathbf{x})u] \end{aligned} \quad (5.29)$$

将自适应律 (5.17) 和 (5.18) 代入上式, 得:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \omega \quad (5.30)$$

由于 $-\frac{1}{2}\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} \leq 0$, 通过选取最小逼近误差 ω 非常小的模糊系统, 可实现 $\dot{V} \leq 0$ 。

5.2.3 仿真实例

被控对象取单级倒立摆，如图5-5所示，其动态方程如下：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g \sin x_1 - m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1 / (m_c + m)}{l(4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m))} + \frac{\cos x_1 / (m_c + m)}{l(4/3 - m \cos^2 x_1 / (m_c + m))} u$$

其中 x_1 和 x_2 分别为摆角和摆速， $g = 9.8m/s^2$ ， $m_c = 1kg$ 为小车质量， m 为摆杆质量， $m = 0.1kg$ ， l 为摆长的一半， $l = 0.5m$ ， u 为控制输入。

位置指令为 $x_d(t) = 0.1 \sin(\pi t)$ 。取以下5种隶属函数：

$$\mu_{NM}(x_i) = \exp \left[- \left((x_i + \pi / 6) / (\pi / 24) \right)^2 \right]$$

$$\mu_{NS}(x_i) = \exp \left[- \left((x_i + \pi / 12) / (\pi / 24) \right)^2 \right]$$

$$\mu_Z(x_i) = \exp \left[- \left(x_i / (\pi / 24) \right)^2 \right]$$

$$\mu_{PM}(x_i) = \exp \left[- \left((x_i - \pi / 6) / (\pi / 24) \right)^2 \right]$$

$$\mu_{PS}(x_i) = \exp \left[- \left((x_i - \pi / 12) / (\pi / 24) \right)^2 \right]$$

由于 $i=1, 2$, 则用于逼近 g 和 f 的模糊规则分别有25条。

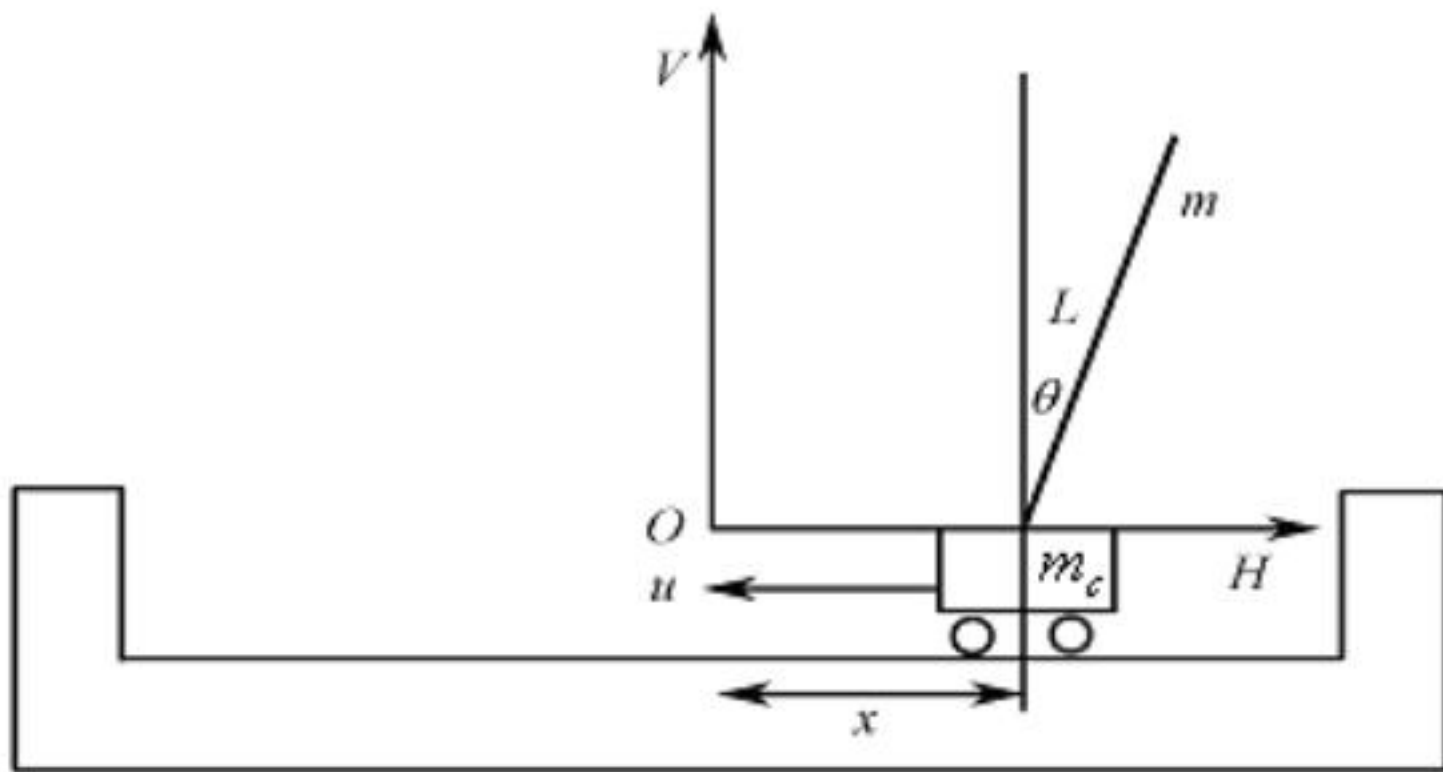


图5-5 单级倒立摆系统示意图

根据隶属函数设计程序，可得到隶属函数图，如图5-6所示。

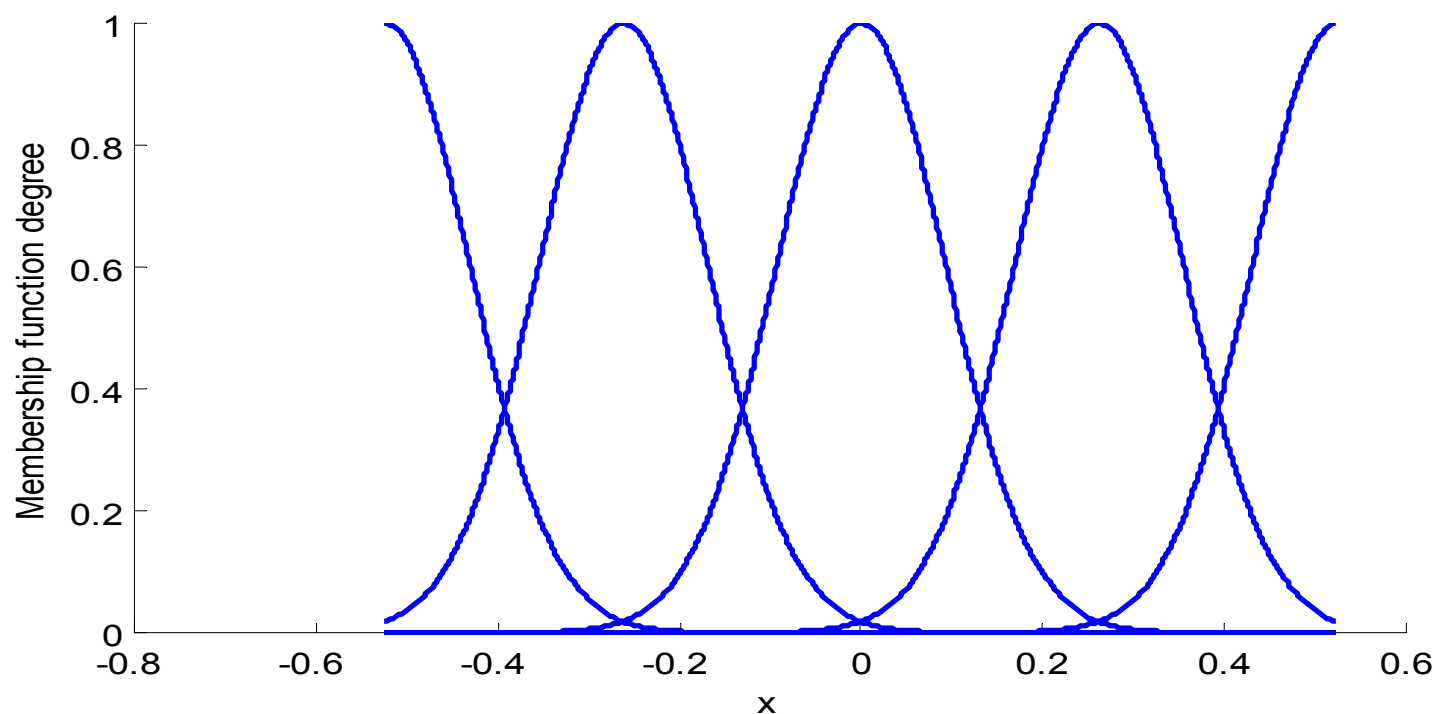


图5-6 的隶属函数

倒立摆初始状态为 $[\pi/60, 0]$ ， θ_g 和 θ_f 的初始值取0.10，采用控制律（5.9），取

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$$

自适应参数取 $\gamma_1 = 50$ ， $\gamma_2 = 1$ 。

在程序中，分别用 FS_1 、 FS_2 、 FS 和表示模糊系统 $\xi(x)$ 的分子、分母及 $\xi(x)$ ，仿真结果如图5-7至图5-10所示。

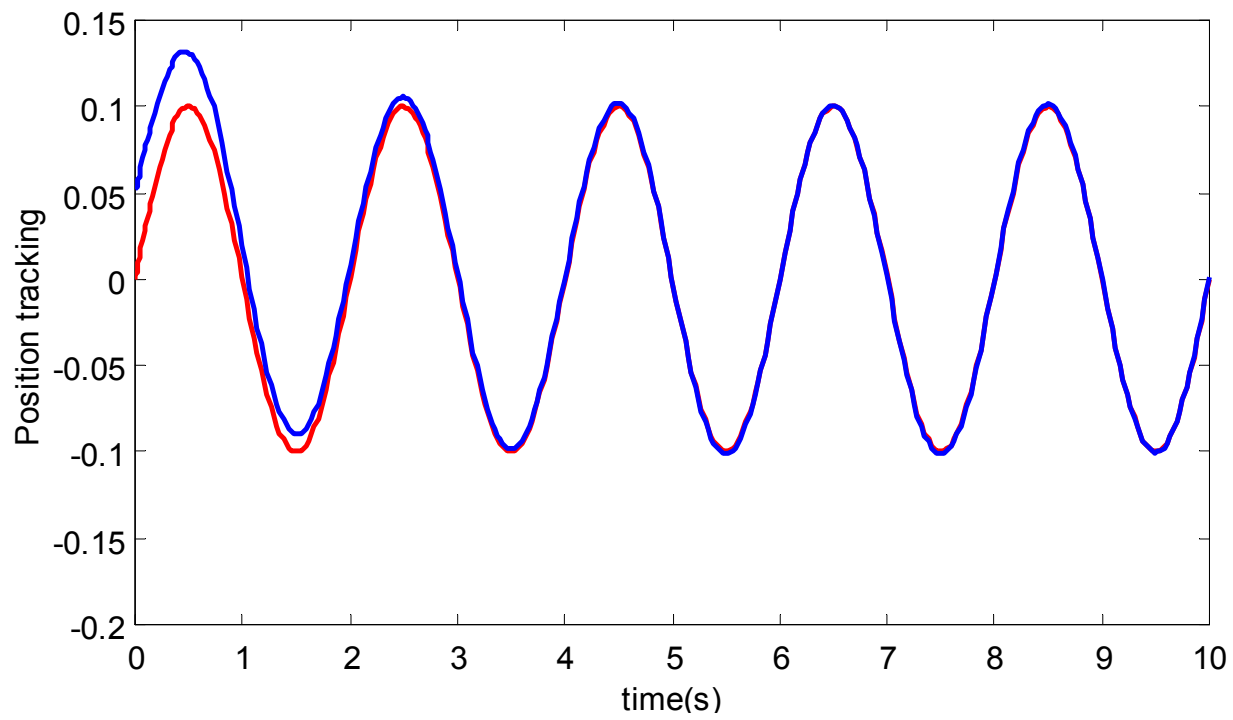


图5-7 位置跟踪

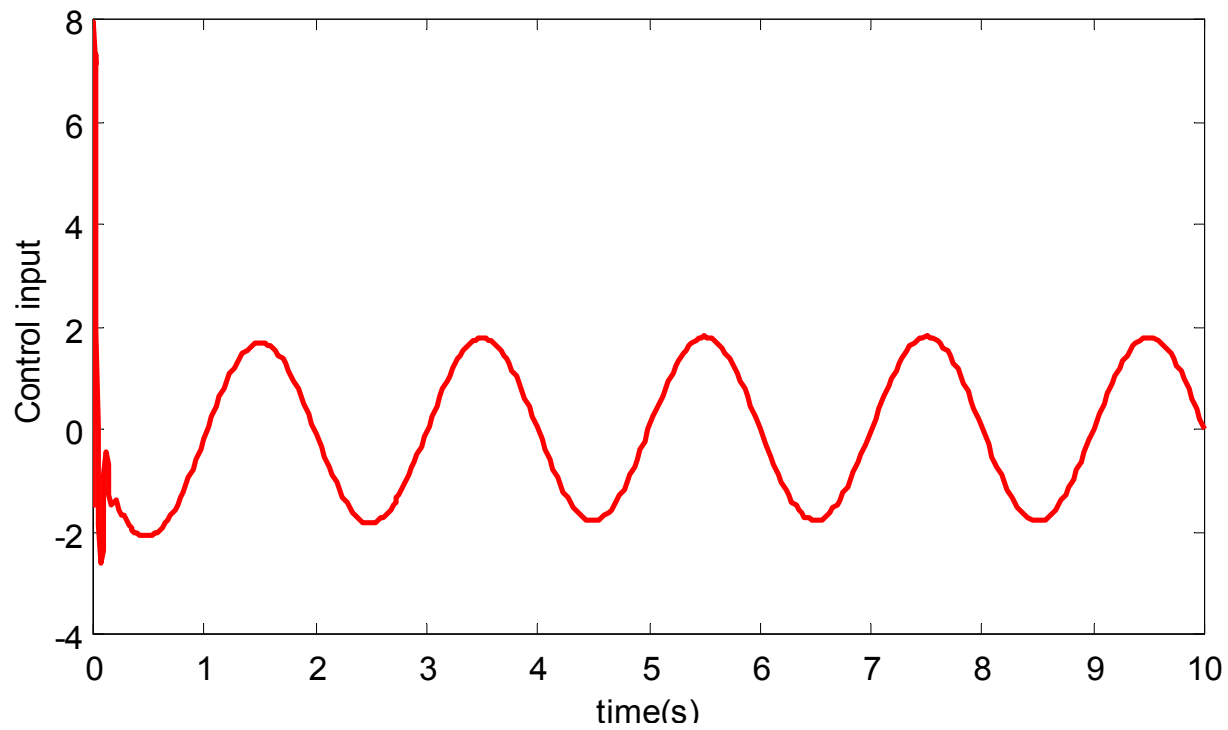


图5-8 控制输入信号

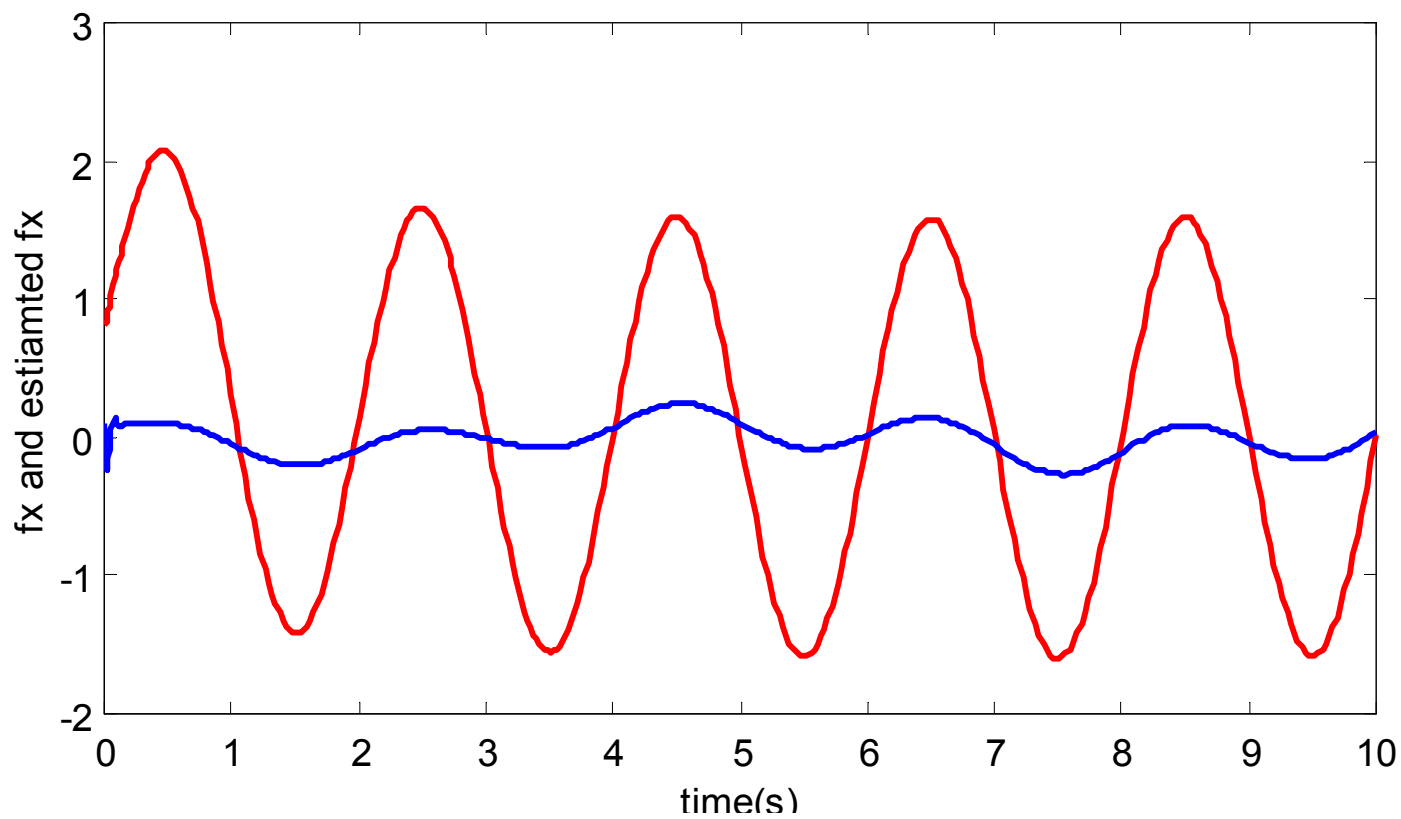


图5-9 $\hat{f}(x,t)$ 及 $f(x,t)$ 的变化

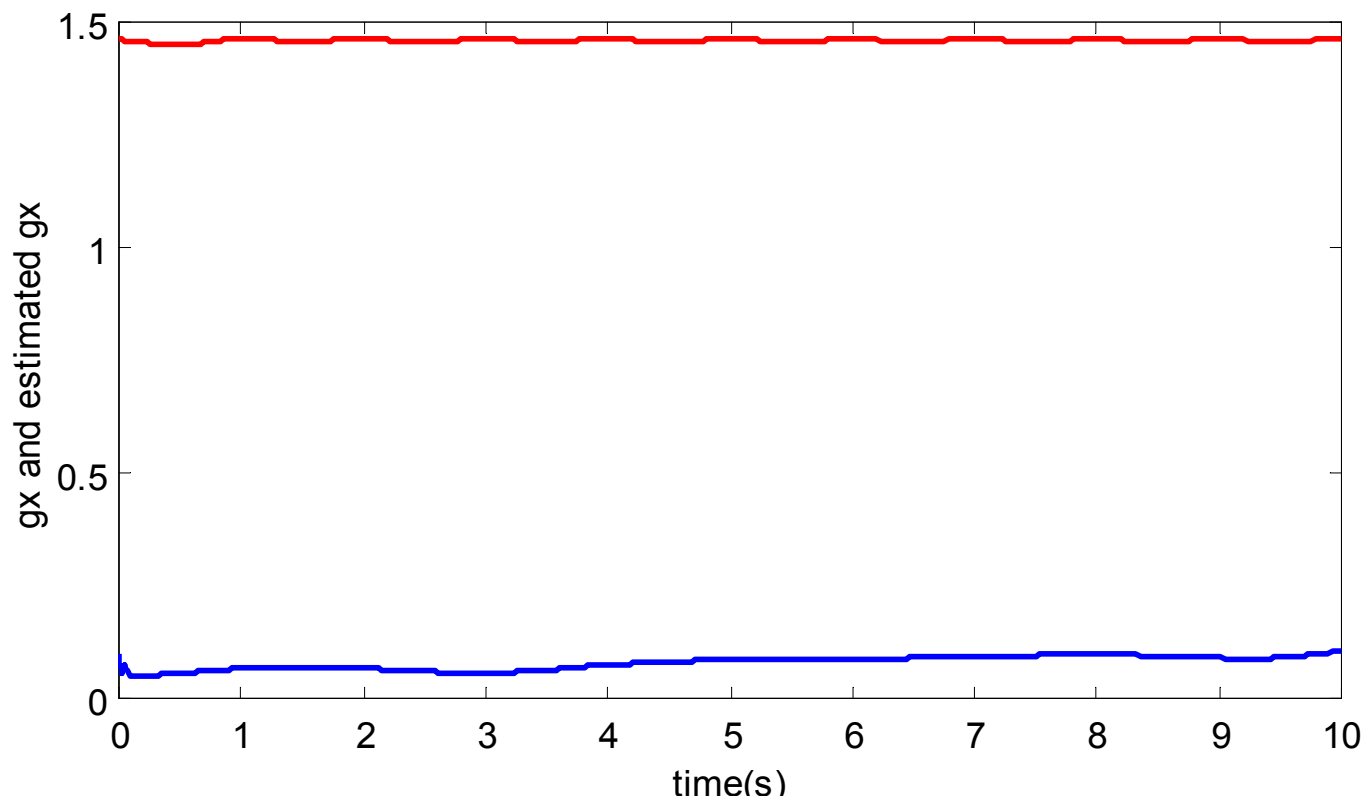


图5-10 $g(x,t)$ 及 $\hat{g}(x,t)$ 的变化

间接模糊自适应控制仿真程序有5个：

- (1) 隶属函数设计程序： **chap5_3mf.m**;
- (2) Simulink主程序： **chap5_3sim.mdl**;
- (3) 控制器S函数： **chap5_3s.m**;
- (4) 被控对象S函数： **chap5_3plant.m**;
- (5) 作图程序： **chap5_3plot.m**。见附录。

5.3 直接自适应模糊控制

直接模糊自适应控制和间接自适应模糊控制所采用的规则形式不同。间接自适应模糊控制利用的是被控对象的知识，而直接模糊自适应控制采用的是控制知识。

5.3.1 问题描述

考虑如下方程所描述的研究对象

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + bu \quad (5.31)$$

$$y = x \quad (5.32)$$

式中， f 为未知函数， b 为未知的正常数。

直接自适应模糊控制采用下面IF-THEN模糊规则来描述控制知识：

如果 x_1 是 P^r 且 \cdots 且 x_u 是 P_n^r , 则 u 是 Q^r (5.33)

式中, P_i^r, Q^r 为 R 中模糊集合, 且 $r = 1, 2, \cdots, L_u$ 。

设位置指令为 y_m , 令

$$e = y_m - y = y_m - x \quad (5.34)$$

$$\mathbf{e} = (e, \dot{e}, \cdots, e^{(n-1)})^T$$

选择 $\mathbf{k} = (k_n, \dots, k_1)^T$ ，使多项式 $s^n + k_1 s^{(n-1)} + \dots + k_n$ 的所有根部都在复平面左半开平面上。取控制律为

$$u^* = \frac{1}{b} [-f(\mathbf{x}) + y_m^{(n)} + \mathbf{K}^T \mathbf{e}] \quad (5.35)$$

将 (5.35) 代入 (5.31)，得到闭环控制系统的方程：

$$e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_n e = 0 \quad (5.36)$$

由 \mathbf{K} 的选取，可得 $t \rightarrow \infty$ 时 $e(t) \rightarrow 0$ ，即系统的输出 y 渐进地收敛于理想输出 y_m 。

直接型模糊自适应控制是基于模糊系统设计一个反馈控制器 $u = u(\mathbf{x}|\theta)$ 和一个调整参数向量 θ 的自适应律, 使得系统输出 y 尽可能地跟踪理想输出 y_m 。

5.3.2 控制器的设计

直接自适应模糊控制器为

$$u = u_D(\mathbf{x}|\theta) \quad (5.37)$$

式中, u_D 是一个模糊系统, θ 是可调参数集合。

模糊系统 u_D 可由以下两步来构造:

步骤1: 对变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 定义 m_i 个模糊集合

$$A_i^{l_i} \quad (l_i = 1, 2, \dots, m_i)$$

步骤2: 用以下 $\prod_{i=1}^n m_i$ 条模糊规则来构造模糊系统 $u_D(x|\theta)$:

如果 x_1 是 $A_1^{l_1}$ 且...且 x_n 是 $A_n^{l_n}$, 则 u_D 是 $S^{l_1 \dots l_n}$ (5.38)

其中, $l_i = 1, 2, \dots, m_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

采用乘积推理机、单值模糊器和中心平均解模糊器来设计模糊控制器，即

$$u_D(\mathbf{x}|\theta) = \frac{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \bar{y}_u^{l_1 \cdots l_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}^{l_i}(x_i) \right)} \quad (5.39)$$

令 $\bar{y}_u^{l_1 \cdots l_n}$ 是自由参数，放在集合 $\theta \in R^{\prod_{i=1}^n m_i}$ 中，
则模糊控制器为：

$$u_D(\mathbf{x}|\theta) = \theta^T \xi(\mathbf{x}) \quad (5.40)$$

其中 $\xi(\mathbf{x})$ 为 $\prod_{i=1}^n m_i$ 维向量。

其第 $l_1 \cdots, l_n$ 个元素为

$$\xi_{l_1 \cdots l_n}(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(x_i) \right)} \quad (5.41)$$

模糊控制规则（5.33）是通过设置其初始参数而被嵌入到模糊控制器中的。

5.3.3 自适应律的设计

将式 (5.35) 、 (5.37) 代入式 (5.31) , 并整理得:

$$e^{(n)} = -\mathbf{K}^T \mathbf{e} + b[u^* - u_D(\mathbf{x}|\theta)] \quad (5.42)$$

令

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

则闭环系统动态方程（5.42）可写成向量形式：

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b} [u^* - u_D(\mathbf{x}|\theta)] \quad (5.44)$$

定义最优参数为：

$$\theta^* = \arg \min_{\substack{\theta \in R^{i=1} \\ \prod_{i=1}^n m_i}} \left[\sup_{x \in R^n} |u_D(\mathbf{x}|\theta) - u^*| \right] \quad (5.45)$$

定义最小逼近误差为：

$$\omega = u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u^* \quad (5.46)$$

由式 (5.44) 可得：

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b}(u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u_D(\mathbf{x}|\theta)) - \mathbf{b}(u_D(\mathbf{x}|\theta^*) - u^*) \quad (5.47)$$

由式 (5.40)，可将误差方程 (5.47) 改写为：

$$\dot{\mathbf{e}} = \Lambda \mathbf{e} + \mathbf{b}(\theta^* - \theta)^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\omega \quad (5.48)$$

定义Lyapunov函数：

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{b}{2\gamma} (\theta^* - \theta)^T (\theta^* - \theta) \quad (5.49)$$

其中参数 γ 是正的常数。

\mathbf{P} 为一个正定矩阵且满足Lyapunov方程

$$\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} = -\mathbf{Q} \quad (5.50)$$

其中 \mathbf{Q} 是一个任意的 $n \times n$ 正定矩阵， $\mathbf{\Lambda}$ 由式 (5.43) 给出。

取 $V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \quad V_2 = \frac{b}{2\gamma} (\theta^* - \theta)^T (\theta^* - \theta)$

令 $M = \mathbf{b}(\theta^* - \theta)^T \xi(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\omega$

则 (5.48) 式变为:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + M$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda}^T + M^T) \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + M) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} + \frac{1}{2} M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} (M^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M) = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} M \end{aligned}$$

即

$$\dot{V}_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \left((\theta^* - \theta)^T \xi(\mathbf{x}) - \omega \right)$$

$$\dot{V}_2 = -\frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \dot{\theta}$$

V 的导数为:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \left[(\theta^* - \theta)^T \xi(x) - \omega \right] - \frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T \dot{\theta} \quad (5.51)$$

令 \mathbf{p}_n 为 \mathbf{P} 的最后一列, 由 $\mathbf{b} = [0, \dots, 0, b]^T$ 可知

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n \mathbf{b}$$

则式 (5.51) 变为:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{b}{\gamma} (\theta^* - \theta)^T [\gamma \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n \xi(\mathbf{x}) - \dot{\theta}] - \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b \omega \quad (5.52)$$

取自适应律

$$\dot{\theta} = \gamma \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n \xi(\mathbf{x}) \quad (5.53)$$

则

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b \omega \quad (5.54)$$

由于 $\mathbf{Q} > 0$, ω 是最小逼近误差, 通过设计足够多规则的模糊系统 $u_D(\mathbf{x}|\theta)$, 可使 ω 充分小, 并满足 $|\mathbf{e}^T \mathbf{p}_n b \omega| < \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q}$, 从而使得 $\dot{V} < 0$ 。

直接型自适应模糊控制系统的结构如图5-15所示

。

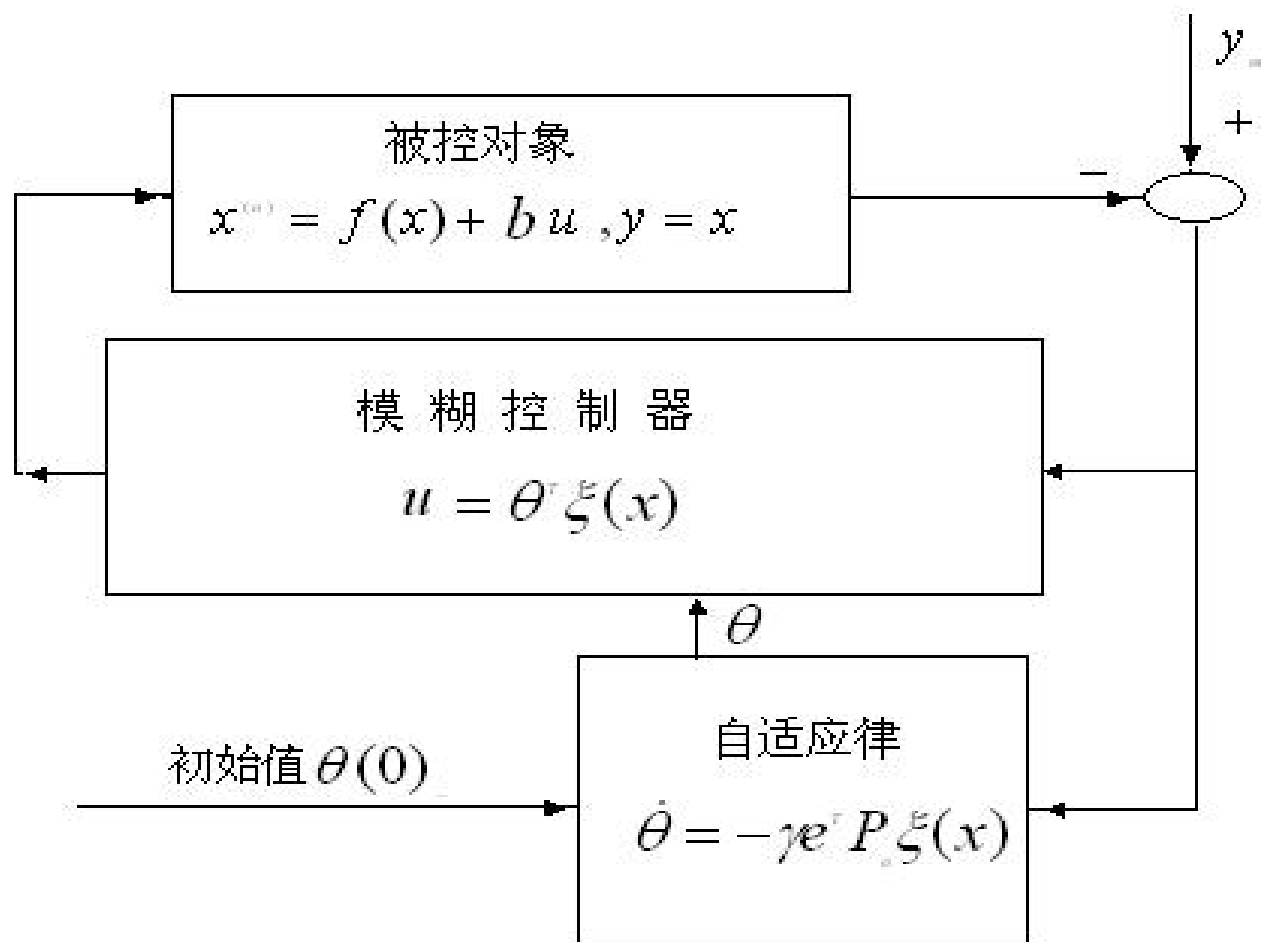


图5-15 直接型自适应模糊控制系统

5.3.4 仿真实例

被控对象为一二阶系统：

$$\ddot{x} = -25\dot{x} + 133u$$

位置指令为 $x_d(t) = \sin(\pi t)$ 。

取以下6种隶属函数：

$$\mu_{N_2}(x) = \exp(-(x + 1.5)^2)$$

$$\mu_{P_2}(x) = \exp(-(x - 1.5)^2)$$

$$\mu_{P_3}(x) = 1 / (1 + \exp(-5(x - 2)))$$

$$\mu_{P_1}(x) = \exp(-(x - 0.5)^2)$$

$$\mu_{N_1}(x) = \exp(-(x + 0.5)^2)$$

$$\mu_{N_3}(x) = 1 / (1 + \exp(5(x + 2)))$$

系统摆初始状态为 $[1,0]$ ， θ 的初始值取0，采用控制律（5.39），取 $Q = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$ ， $k_1 = 1$ ， $k_2 = 10$

自适应参数取 $\gamma = 50$ 。

根据隶属函数设计程序，可得到隶属函数图，如图5-16所示。在控制系统仿真程序中，分别用 FS_2 、 FS_1 和 FS 表示模糊系统 $\xi(x)$ 的分子、分母及 $\xi(x)$ ，仿真结果如图5-17和图5-18所示。

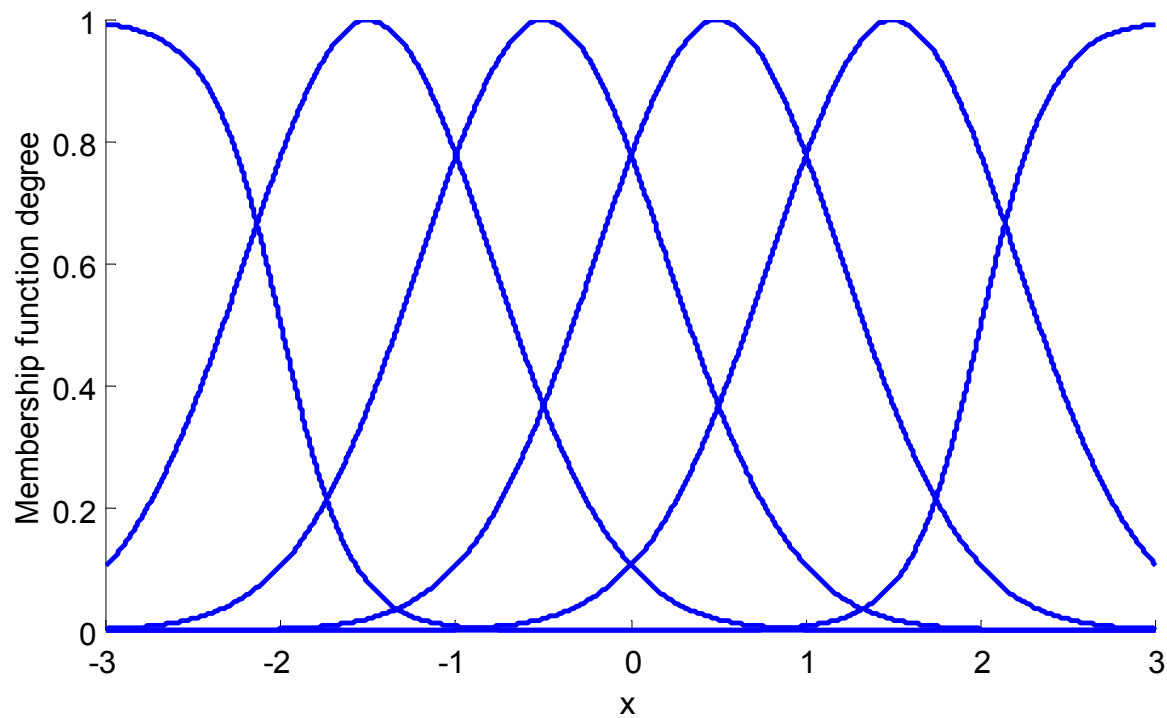


图5-12 x 的隶属函数

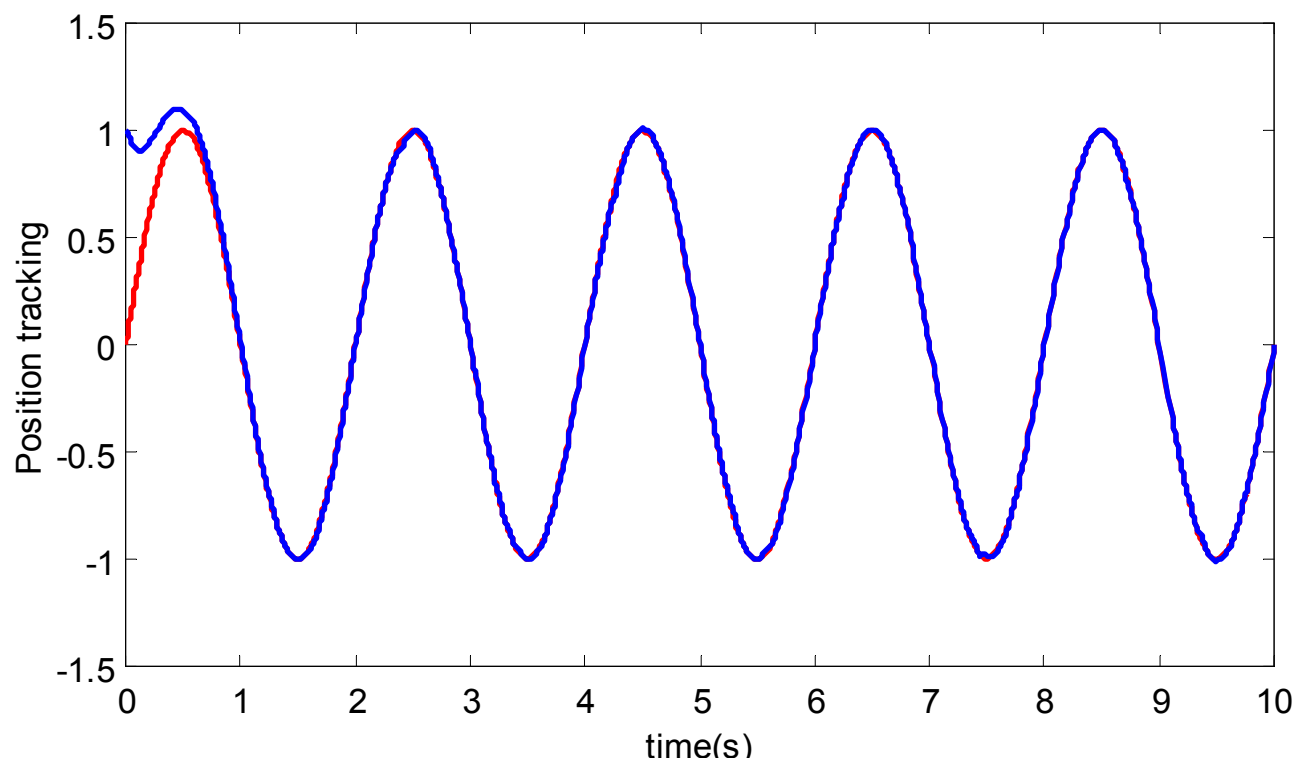


图5-13 位置跟踪

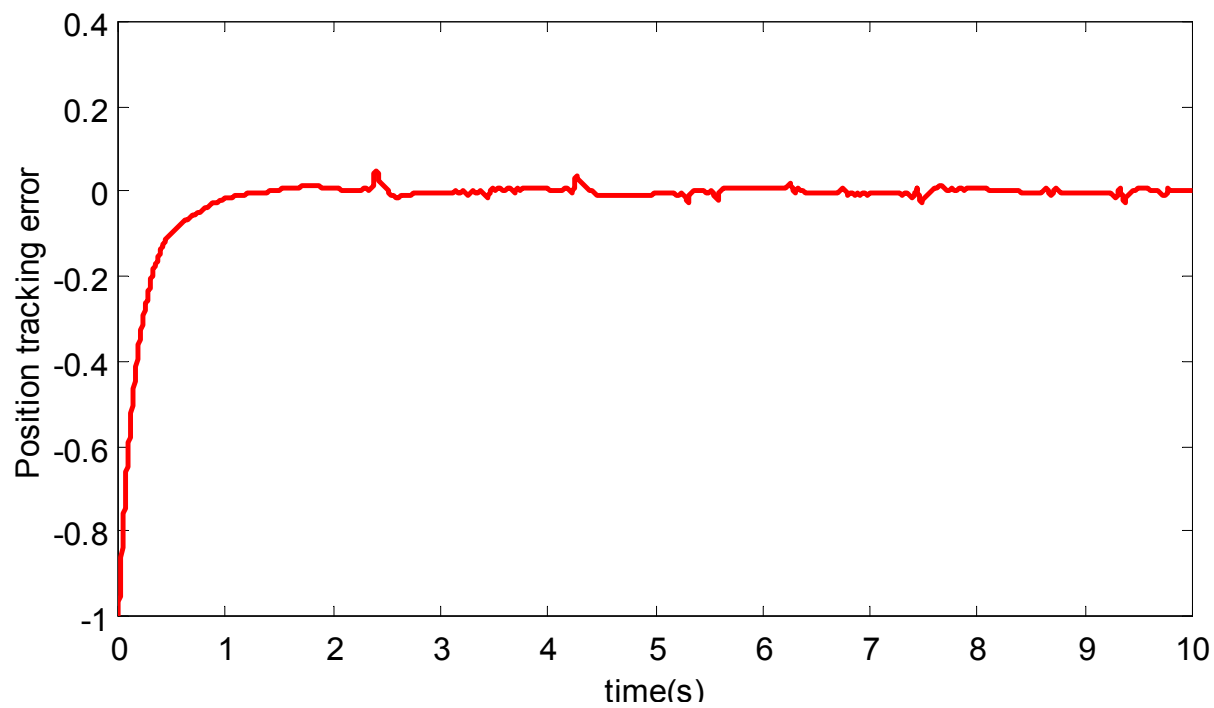


图5-14 控制输入信号

直接自适应模糊控制程序有5个：

- (1) 隶属函数设计程序chap5_4mf.m;
- (2) Simulink主程序chap5_4sim.mdl;
- (3) 控制器S函数程序chap5_4s.m;
- (4) 被控对象S函数程序chap5_4plant.m;
- (5) 作图程序： chap5_4plot.m。

5.4 机器人关节数学模型

在许多生产场合，利用机器人取代人体操作，不仅提高了生产效率，而且还能完成一些人所不能完成的高强度、危险作业。机械臂是工业机器人中常见的一类被控对象。

一个典型的多关节机器人如图5-19所示。

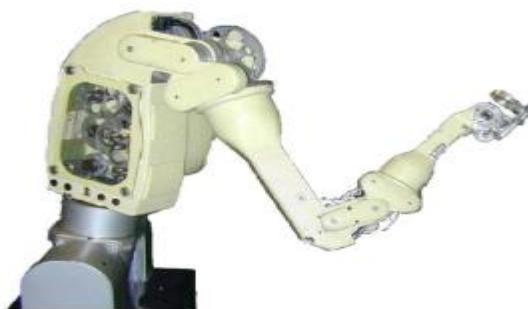


图5-19 一个8关节机器人

考虑一个关节机器人，其动态性能可由二阶非线性微分方程描述：

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (5.55)$$

式中， $q \in R^n$ 为关节角位移量， $D(q) \in R^{n \times n}$ 为机器人的惯性矩阵，表示 $C(q, \dot{q}) \in R^n$ 离心力和哥式力， $G(q) \in R^n$ 为重力项， $F(\dot{q}) \in R^n$ 表示摩擦力矩， $\tau \in R^n$ 为控制力矩， $\tau_d \in R^n$ 为外加扰动。

一个典型的多关节机器人如图5-20所示。

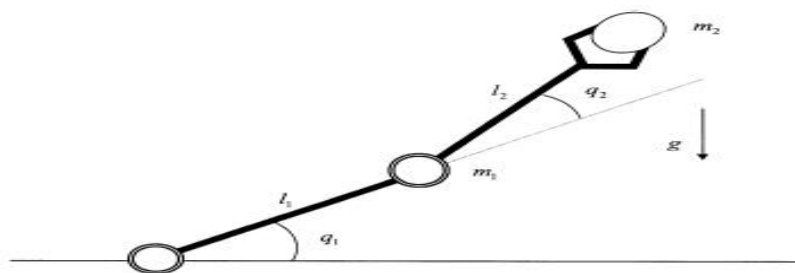


图5-20双关节刚性机械手示意图

机械手动力学模型的特点：

- 1、动力学模型包含的项数多。随着机器人关节数的增加，方程中包含的项数增加。
- 2、高度非线性，方程的每一项都含有正弦余弦等非线性因素。
- 3、高度耦合。
- 4、模型不确定性和时变性。当机器人搬运物体时，由于所持物件不同，负载会发生变化，另外，关节的摩擦力矩也会随时间变化。

机械手动力学模型有以下几个特性：

- 1、 $D(q)$ 为一个正定对称矩阵，且是有界的，即存在已知正常数 m_1 和 m_2 ，使得 $m_1 I \leq D(q) \leq m_2 I$ ；
- 2、 $C(q, \dot{q})$ 有界，即存在已知 $c_b(q)$ ，使得 $\|C(q, \dot{q})\| \leq c_b(q) \|\dot{q}\|$ 成立；
- 3、矩阵 $\dot{D} - 2C$ 为斜对称矩阵；
- 4、未知扰动满足 $\|\tau_d\| \leq \tau_M$ ， τ_M 为一个已知正常数。

5.5 基于模糊补偿的机械手自适应模糊控制

5.5.1 系统描述

机器人的动态方程为：

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.56)$$

其中 $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ 为惯性力矩， $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是向心力和哥氏力矩， $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 是重力项， $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 是由摩擦 \mathbf{F}_r 、扰动 $\boldsymbol{\tau}_d$ 、负载变化的不确定项组成。

5.5.2 基于模糊补偿的控制

假设 $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 为已知，且所有状态变量可测得。定义误差函数为：

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{q}} \quad (5.57)$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为正定阵， $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ 为跟踪误差。

定义

$$\dot{\mathbf{q}}_r(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{q}}(t) \quad (5.58)$$

定义Lyapunov函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{s}^T \mathbf{D} \mathbf{s} + \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i \right) \quad (5.59)$$

其中， $\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$ 则

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r$$

$$\mathbf{D} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}}_r = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G} - \mathbf{F} - \mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}}_r$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \mathbf{s}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{D}} \mathbf{s} + \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i \\ &= -\mathbf{s}^T (-\boldsymbol{\tau} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C} \mathbf{s}) + \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i \\ &= -\mathbf{s}^T (\mathbf{D} \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G} + \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}) + \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i \end{aligned} \quad (5.60)$$

其中 $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 为未知非线性函数，采用基于MIMO的模糊系统 $\hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta)$ 来逼近 $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 。参考文献[15]，设计以下两种基于模糊补偿的自适应控制律。

1. 自适应控制律的设计

设计控制律为：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta) - \mathbf{K}_D \mathbf{s} \quad (5.61)$$

其中， $\mathbf{K}_D = \text{diag}(K_i)$ ， $K_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta) = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta_1) \\ \hat{F}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta_2) \\ \vdots \\ \hat{F}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\Theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ \Theta_2^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ \vdots \\ \Theta_n^T \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

定义模糊逼近误差为：

$$\omega = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta^*) \quad (5.63)$$

将控制律式 (5.61) 代入式 (5.60)，得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\mathbf{s}^T \left(F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta) + \mathbf{K}_D \mathbf{s} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\Theta}}_i \\ &= -\mathbf{s}^T \left(F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta) + \hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta^*) - \hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta^*) + \mathbf{K}_D \mathbf{s} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\Theta}}_i \\ &= -\mathbf{s}^T \left(\tilde{\Theta}^T \xi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) + \omega + \mathbf{K}_D \mathbf{s} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\Theta}}_i \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \omega + \sum_{i=1}^n \left(\tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i \dot{\tilde{\Theta}}_i - s_i \tilde{\Theta}_i^T \xi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \right) \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\Theta} = \Theta^* - \Theta$ ， $\xi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ 为模糊系统。

自适应律为

$$\dot{\Theta}_i = -\Gamma_i^{-1} s_i \xi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}), i = 1, 2, \dots, n \quad (5.64)$$

则

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}$$

2. 鲁棒自适应控制

为了消除逼近误差造成的影响，保证系统稳定，在控制律中采用了鲁棒项。设计鲁棒自适应律为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}|\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \mathbf{W} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \quad (5.65)$$

其中 $\mathbf{W} = \operatorname{diag}[w_{M_1}, \dots, w_{M_n}]$, $w_{M_i} \geq |\omega_i|, i = 1, 2, \dots, n$ 。

将控制律式 (5.65) 代入式 (5.59)，得

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} \leq 0$$

假设机器人关节个数为 n 个，如果采用基于MIMO的模糊系统 $\hat{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} | \Theta)$ 来逼近 $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ ，则对每个关节来说，输入变量个数为3个。如果 n 针对个关节机器人力臂，对每个输入变量设 k 个隶属函数，则规则总数为 k^{3n} 。

例如，机器人关节个数为2，每个关节输入变量个数为3，每个输入变量设计5个隶属函数，则规则总数为，如此多的模糊规则会导致计算量过大。为了减少模糊规则的个数，应针对的具体表达形式分别进行设计。

5.5.3 基于摩擦补偿的控制

当 $F(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 只包括摩擦项 F_r 时, 可只考虑针对摩擦进行模糊逼近的模糊补偿。由于摩擦力只与速度信号有关, 用于逼近摩擦的模糊系统可表示为 $\hat{F}(\dot{q}|\theta)$ 可根据基于传统模糊补偿的控制器设计方法, 即式 (5.61)、式 (5.64) 和式 (5.65) 来设计控制律。

模糊自适应控制律为

$$\dot{\theta}_i = -\Gamma_i^{-1} s_i \xi(\dot{q}), i = 1, 2, \dots, n \quad (5.68)$$

模糊系统设计为

$$\hat{F}(\dot{q}|\theta) = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(\dot{q}_1) \\ \hat{F}_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \hat{F}_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1^T \xi^1(\dot{q}_1) \\ \theta_2^T \xi^2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \theta_n^T \xi^n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

5.5.4 仿真实例

当针对双关节刚性机械手，其动力学方程为（5.56），具体表达如下：

$$\begin{pmatrix} D_{11}(q_2) & D_{12}(q_2) \\ D_{21}(q_2) & D_{22}(q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C_{12}(q_2)\dot{q}_2 & -C_{12}(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ C_{12}(q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(q_1 + q_2)g \\ g_2(q_1 + q_2)g \end{pmatrix} + F(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$D_{11}(q_2) = (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + 2m_2r_1r_2 \cos(q_2) \quad (5.68)$$

$$D_{12}(q_2) = D_{21}(q_2) = m_2r_2^2 + m_2r_1r_2 \cos(q_2)$$

$$D_{22}(q_2) = m_2r_2^2$$

$$C_{12}(q_2) = m_2r_1r_2 \sin(q_2)$$

令 $\mathbf{y} = [q_1, q_2]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2]^T$, $\mathbf{x} = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$ 。取系统参数 $r_2 = 0.8\text{m}$,

$r_1 = 1\text{m}$, $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 1.5\text{kg}$ 。

控制目标是使双关节的输出 q_1 、 q_2 分别跟踪期望轨迹 $y_{d1} = 0.3 \sin t$

和 $y_{d2} = 0.3 \sin t$ 。定义隶属函数为：

$$\mu_{A_i'}(x_i) = \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i'}{\pi/24}\right)^2\right)$$

其中 \bar{x}_i' 分别为 $-\pi/6$ ， $-\pi/12$ ， 0 ， $\pi/12$ 和 $\pi/6$ ， $i=1,2,3,4,5$ ， A_i' 分别为 NB，NS，ZO，PS，PB。

针对带有摩擦的情况，采用基于摩擦模糊补偿的机械手控制，

取控制器设计参数为 $\lambda_1 = 10$ ， $\lambda_2 = 10$ ， $\mathbf{K}_D = 20\mathbf{I}$ ， $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.0001$ 。取系统始

状态为 $q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ ，取摩擦项为 $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 15\dot{q}_1 + 6\operatorname{sgn}(\dot{q}_1) \\ 15\dot{q}_2 + 6\operatorname{sgn}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}$ ，取

干扰项为 $\boldsymbol{\tau}_d = \begin{bmatrix} 0.05 \sin(20t) \\ 0.1 \sin(20t) \end{bmatrix}$ 。在鲁棒控制律中，取 $\mathbf{W} = \operatorname{diag}[2, 2]$ 。

采用鲁棒控制律式 (5.67)，自适应律取式 (5.68)，
仿真结果见图5-21至图5-23。

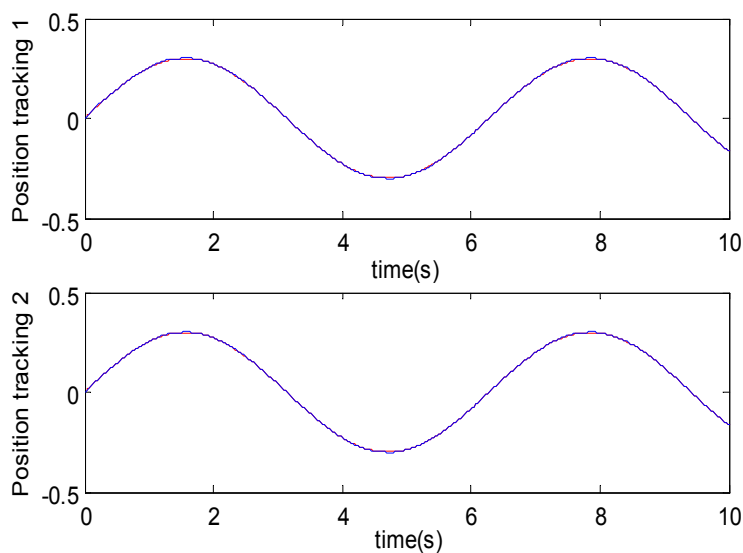


图5-21 双关节位置跟踪

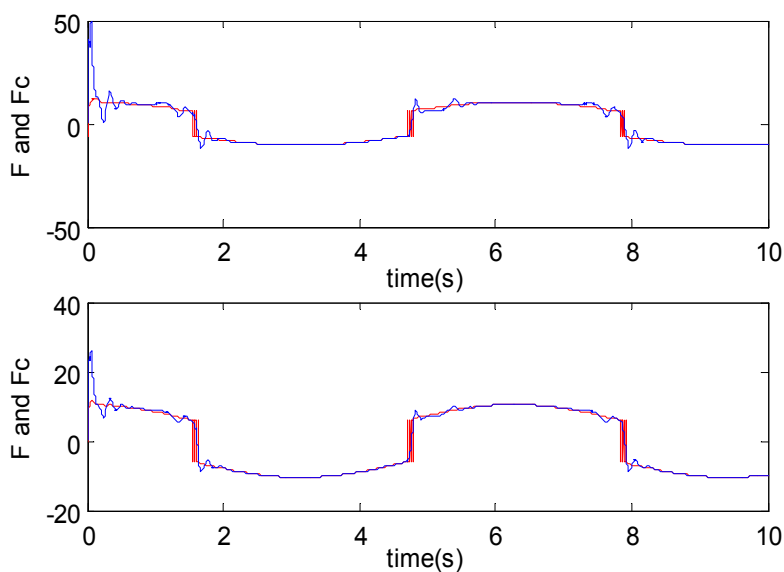


图5-22 双关节摩擦及其补偿

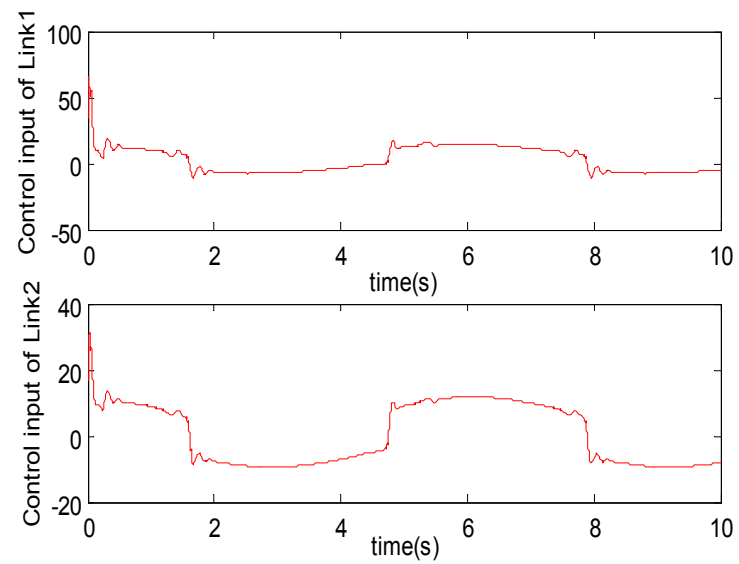


图5-23 双关节控制输入