



安徽理工大学

ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

研究生课程

试验设计与分析

主讲 闵凡飞 教授

材料科学与工程学院

2020年5月

第三章 试验设计方法

3.1 单因素试验设计法（自学为主）

1. 单因素试验设计法的基本概念
2. 单因素试验设计法的目的及适用性
3. 单因素试验设计法的试验安排
 - 1、试验范围的确定
 - 2、试验间隔的确定
 - 3、试验顺序的确定
4. 常用单因素试验法

穷举法 平分法 0.618法 分数法 抛物线法等

(1) 穷举法（均分法）

根据试验的精度要求，均分试验范围，并在每个试点上安排试验。

(2) 平分法

在试验范围中点上安排试验，根据试验结果将不符合试验指标的的效果的范围划去，并且在剩下范围的中点，在重复试验，如此下去直到达到要求精度为止。

(3) 0.618法

在实验范围的0.618和0.382点处的位置安排第一次和第二次试验，根据试验结果确定新试验范围，在新试验范围内仍然在 0.618和0.382点处的位置安排试验，依此类推直至找到最优点。

(4) 分数法

斐波拉奇数列：

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...

用 F_0 、 F_1 、 F_2 、...依次表示上述数列，它们满足递推关系：

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

如果我们用 F_n 来表示斐波拉奇数列，则 $F_0=1$ ， $F_1=1$ ， $F_2=2$ ， $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ ，等分试验范围为 m 等份（根据试验精度和实际要求进行）在 F_{n-1} ， F_{n-2} 安排试验的第一个和第二个点，根据试验结果划去一段试验范围，在余下的范围从新编号即以 F_0 ， F_1 ， F_2 ，...，编号，在新的编号中仍以 F_{n-1} ， F_{n-2} 上编排试验，依次类推直到范围内没有可以作的点为止。

分数法实例

卡那霉素生物测定培养温度试验。卡那霉素发酵液测定，国内外都规定培养温度为 $37 \pm 1^{\circ}\text{C}$ ，培养时间在16h以上。某制药厂为缩短时间，决定进行试验，试验范围为 $29 \sim 50^{\circ}\text{C}$ ，精确度要求 $\pm 1^{\circ}\text{C}$ ，中间试验点共有20个，用分数法安排试验。

试验序号:

⑤ ⑥

V 编号:

0 1 2 3

试验序号:

① ⑤

IV编号:

0 1 2 3 4 5

试验序号:

④ ①

III编号:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---

试验序号:

① ③

II 编号:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

试验序号:

② ①

I 编号:

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
```

培养温度 (°C):

29 37 40 42 43 44 45 50

培养时间 (h):

18 13 9 8 10 15

(5) 抛物线法

①在三个试验点： x_1 、 x_2 、 x_3 ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，分别得试验值 y_1 、 y_2 、 y_3 ，根据拉格朗日插值法可以得到一个二次函数。

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

②设上述二次函数在 x_4 取得最大值，这时：

$$x_4 = \frac{1}{2} \frac{y_1(x_2^2 - x_3^2) + y_2(x_3^2 - x_1^2) + y_3(x_1^2 - x_2^2)}{y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)}$$

③ 在 $x=x_4$ 处做试验，得试验结果 y_4 。如果假定 y_1 , y_2 , y_3 , y_4 中的最大值是由 x_i' 给出的，除 x_i 之外，在 x_1 , x_2 , x_3 和 x_4 中取较靠近 x_i' 的左右两点，将这三点记为 x_1' , x_2' , x_3' ，此处 $x_1' < x_2' < x_3'$ ，若在 x_1' , x_2' , x_3' 处的函数值分别为 y_1' , y_2' , y_3' ，则根据这三点又可得到一条抛物线方程，如此继续下去，直到找到函数的极大点(或它的充分邻近的一个点)被找到为止。

(6) 分批试验法

这里只介绍各批数目都相同且每批做偶数个试验的方法，现以每批两个试验为例，说明方法的基本精神。

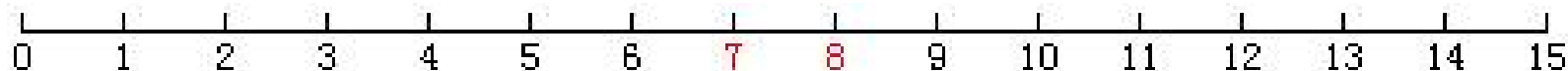
①若只做一批试验，每批两个试验，把试验范围平分3等份，在每个分点上做试验，如下所示：



②若做两批试验，每批两个试验，把试验范围分为7等份，在第3、4两点做第一批试验。如第4点好，再做5、6两点；如第3点好，则做1、2两点。



③若做三批试验，每批两个试验，把试验范围分为15等份，在第7、8两点做第一批试验。如第7点好，则把第8点以上的范围划去；如第8点好，则把7点以下的划去，在余下的部分做第二批试验，如下所示：



依此可以推出做更多批数试验的情形来。

每批做4个、6个或更多个试验的情形原理相同。容易推出，若每批做 $2k$ 个试验，共作 n 批，则应将试验范围等分 $L_n^{2k} = 2(k+1)^n - 1$ 份。

第一批试验点是： L_{n-1}^{2k} ， $L_{n-1}^{2k} + 1$ ， $2L_{n-1}^{2k} + 1$ ， $2L_{n-1}^{2k} + 2$ ，...

$kL_{n-1}^{2k} + (k-1)$ ， $kL_{n-1}^{2k} + k$ 。

3.2 析因试验设计法

1. 析因试验设计法的基本概念

在多因素试验中，将因素的全部水平相互组合按随机的顺序进行试验，以考察各因素的主效应与因素之间的交互效应，这种安排试验的方法称为析因试验设计法。

2. 析因试验设计法的特点:全面性，工作量大 例：

合成材料的强度析因试验安排

重复测定	催化剂用量	合成的温度			
		A ₁ (80℃)	A ₂ (90℃)	A ₃ (100℃)	A ₄ (110℃)
第 1 次	B ₁ (0.5%)	29	31	34	31
	B ₂ (1.0%)	32	33	33	30
	B ₃ (1.5%)	34	34	32	32
第 2 次	B ₁ (0.5%)	31	32	34	34
	B ₂ (1.0%)	32	33	33	33
	B ₃ (1.5%)	34	36	35	32
第 3 次	B ₁ (0.5%)	30	33	34	35
	B ₂ (1.0%)	32	35	31	33
	B ₃ (1.5%)	34	34	32	32

3.3 分割试验设计法

1. 分割试验设计法的基本概念

在分割试验设计中，不是将全部因素随机组合，而是将其中某一因素A先随机化安排，在此前提下，再将另一因素B随机化安排，组合成各种试验设计条件。

2. 特点

- 1、在分割试验设计中，因素A和因素B在试验中的地位是不等同的，因素A称为一次因素，因素B称为二次因素。
- 2、节省材料与费用。

析因试验设计

	区组		
	第 1 次	第 2 次	第 3 次
试验顺序	A ₂ B ₁	A ₁ B ₂	A ₃ B ₁
	A ₁ B ₂	A ₃ B ₁	A ₂ B ₁
	A ₃ B ₁	A ₃ B ₂	A ₁ B ₂
	A ₁ B ₁	A ₂ B ₂	A ₂ B ₂
	A ₃ B ₂	A ₁ B ₁	A ₃ B ₂
	A ₂ B ₂	A ₂ B ₁	A ₁ B ₁

例 1-4 为降低精煤灰分,选煤试验时须考查磨矿细度与浮选药剂对精煤灰分的影响。按要求,磨矿细度设置了三个水平,浮选药剂设置了两个水平。试进行试验设计并寻求最优试验条件。

解 根据题意,磨矿细度设为因素 A,浮选药剂设为因素 B。按照分割试验设计原则,先随机安排 A 因素的三水平,然后在 A 因素各水平基础上再随机安排 B 因素的两个水平。分割试验设计见表 1-4。

表 1-4 分割试验设计

	测定次数		
	R ₁	R ₂	R ₃
试验搭配	$A_2 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases}$	$A_1 \begin{cases} B_2 \\ B_1 \end{cases}$	$A_3 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases}$
	$A_3 \begin{cases} B_2 \\ B_1 \end{cases}$	$A_3 \begin{cases} B_2 \\ B_1 \end{cases}$	$A_1 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases}$
	$A_1 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases}$	$A_2 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases}$	$A_2 \begin{cases} B_2 \\ B_1 \end{cases}$

例 1-4 之所以采用分割试验设计,是基于选矿知识的具体运用。磨矿细度和浮选药剂是影响精煤灰分的重要因素,但由于在特定磨矿细度条件下,应有一套适宜的药剂制度做保障,因此,应先确定磨矿细度,然后去优化在该磨矿细度条件下的药剂制度。这种试验安排充分体现了分割试验设计的思想。此外,一般可排除磨矿细度与浮选药剂的交互作用,也为分割试验设计创造了条件。

3.4 正交试验设计法（自学为主）

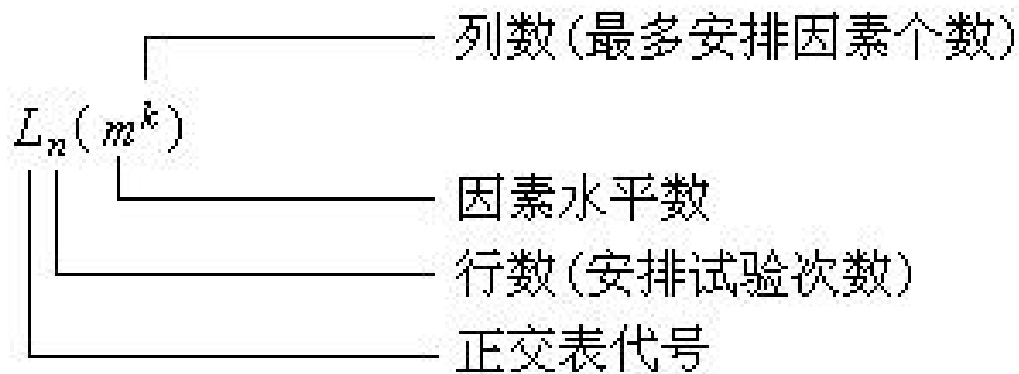
1. 正交试验设计法的基本概念

正交试验设计法就是使用已经造好的表格——正交表来安排试验，并进行试验数据的统计分析的一种方法。

2. 正交试验设计法的特点

- 1、正交试验设计法与全面试验法相比减少了试验次数，但不影响试验结果；
- 2、正交试验设计法虽然是一种部分试验法，但对试验中的任一个因素来说都是带有等重复的全面性试验（对混合水平的正交表除外）；
- 3、能够确定哪些因素是主要的，哪些因素是次要的（通过正交表对试验数据极差或方差分析来实现）；
- 4、能够确定每个因素取哪个水平对试验指标好，从而确定其最佳搭配（通过正交表对试验数据进行统计分析实现）；
- 5、便于处理交互作用。

- 正交表



$$L_8(2^7)$$

表示各因素的**水平数**为**2**，做**8**
次试验，最多考虑**7**个**因素**（含
交互作用）的**正交表**。

- 正交表

表 4.1 正交表 $L_9(3^4)$

列号 试验号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

常用的正交表有：

二水平正交表： $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{12}(2^{11})$, $L_{16}(2^{15})$, $L_{32}(2^{31})$, $L_{64}(2^{63})$, $L_{128}(2^{127})$

三水平正交表： $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$, $L_{81}(3^{40})$, $L_{243}(3^{121})$

四水平正交表： $L_{25}(5^6)$, $L_{125}(5^{31})$

五水平正交表： $L_{16}(4^5)$, $L_{64}(4^{21})$

七水平正交表： $L_{49}(7^8)$

4. 正交试验设计法的基本步骤

正交试验设计总的来说包括两部分：一是试验设计；二是数据处理。基本步骤可简单归纳如下：

- (1) 明确试验目的，确定评价指标
- (2) 挑选因素，确定水平
- (3) 选正交表，进行表头设计
- (4) 明确试验方案，进行试验，得到结果
- (5) 对试验结果进行统计分析
- (6) 进行验证试验，作进一步分析

1) 引例：设某试验需考察 3 个因素 A, B, C, 每个因素考察 3 个不同的水平即 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ 。

若做全面试验，需做 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 次试验。现在用正交试验法来安排试验，选用 $L_9^{(3)}$ 正交表，试验安排结果见表 4. 2。

由上面的试验安排可知，共需做 9 次试验而不是 27 次试验，而且通过这 9 次试验的安排可以看出：

- ①每个因素的每个水平都有 3 次试验，具有重复试验的特点；

试验安排结果表

列号 试验号	1	2	3	4	试验安排 结果
1	A_1	B_1	C_1	1	$A_1B_1C_1$
2	A_1	B_2	C_2	2	$A_1B_2C_2$
3	A_1	B_3	C_3	3	$A_1B_3C_3$
4	A_2	B_1	C_2	3	$A_2B_1C_2$
5	A_2	B_2	C_3	1	$A_2B_2C_3$
6	A_2	B_3	C_1	2	$A_2B_3C_1$
7	A_3	B_1	C_3	2	$A_3B_1C_3$
8	A_3	B_2	C_1	3	$A_3B_2C_1$
9	A_3	B_3	C_2	1	$A_3B_3C_2$

3.5 均匀试验设计法

1978年，七机部由于导弹设计的要求，提出了一个五因素的试验，希望每个因素的水平数要多于10，而试验总数又不超过50，显然优选法和正交设计都不能用，方开泰与王元经过几个月的共同研究，提出了一个新的试验设计，即所谓“均匀设计”，将这一方法用于导弹设计，取得了成效。

1. 均匀试验设计法的基本概念

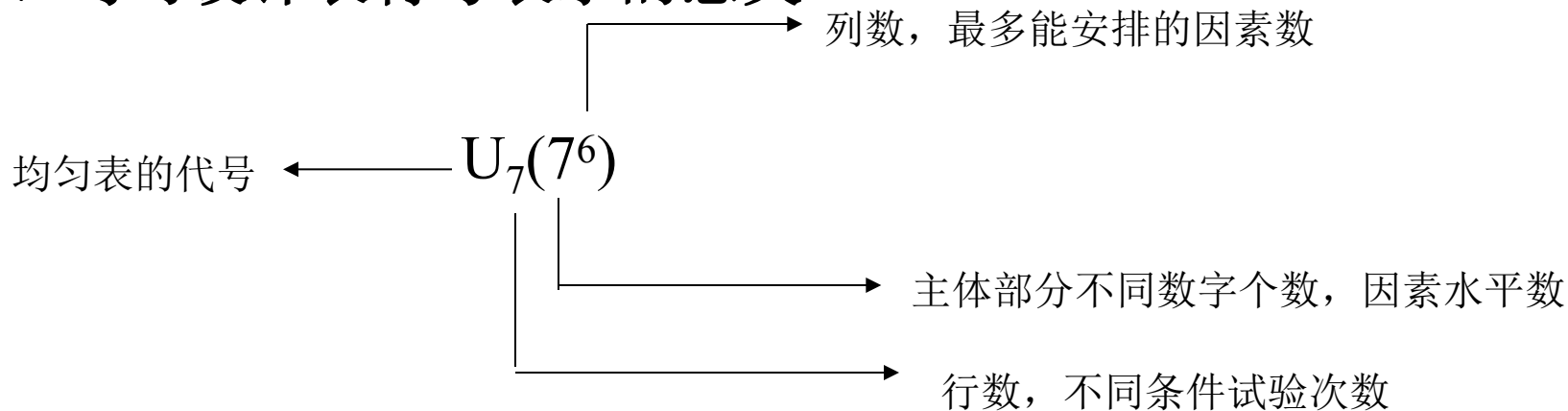
均匀试验设计法就是使用已经造好的表格—均匀设计表来安排试验的一种方法。

2. 均匀试验设计法的特点

- 1、均匀试验设计是一种只考虑试验点在试验范围内均匀散布的一种试验设计方法。
- 2、只考虑试验点的“均匀散布”，而不考虑“整齐可比”，因而可以大大减少试验次数。

3. 均匀设计表

1、均匀设计表符号表示的意义



如 $U_7(7^4)$ 表示要做次7试验，每个因素有7个水平，该表有4列。

$U_7^*(7^4)$

试验号	列号			
	1	2	3	4
1	1	3	5	7
2	2	6	2	6
3	3	1	7	5
4	4	4	4	4
5	5	7	1	3
6	6	2	6	2
7	7	5	3	1

$U_7^*(7^4)$ 的使用表

因素数	列号			D
2	1	3		0.1582
3	2	3	4	0.2132

每个均匀设计表都附有一个使用表，它指示我们如何从设计表中选用适当的列，以及由这些列所组成的试验方案的均匀度。上表是 $U_7(7^4)$ 的使用表。它告诉我们，若有两个因素，应选用1，3两列来安排试验；若有三个因素，应选用2，3，4三列，...，最后1列D表示刻划均匀度的偏差(discrepancy)，偏差值越小，表示均匀度越好。

2、均匀设计表的特点

1) 等水平均匀表具有以下特点

- (1) 每列不同数字都只出现一次，也就是说，每个因素在每个水平仅做一次试验。
- (2) 任意两个因素的试验点点在平面的格子点上，每行每列有且仅有一个试验点。

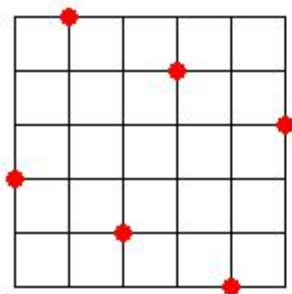
$U_6^*(6^4)$

试验号	列号			
	1	2	3	4
1	1	2	3	6
2	2	4	6	5
3	3	6	2	4
4	4	1	5	3
5	5	3	1	2
6	6	5	4	1

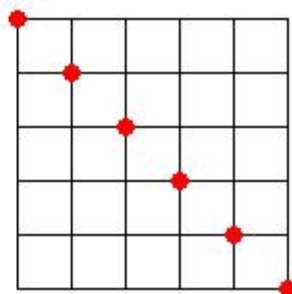
$U_6^*(6^4)$ 的使用表

因素数	列号				D
2	1	3			0.1875
3	1	2	3		0.2656
4	1	2	3	4	0.2990

(3) 均匀设计表任两列组成的试验方案一般不等价。



1、3列试验点分布



1、4列试验点分布

(4) 等水平均匀表的试验次数与水平数是一致的

2) 混合水平均匀设计表

通过改造等水平均匀设计表来得到混合水平均匀设计表。

如某试验中，有A、B、C三个因素，其中因素A、B有三个水平，因素C有二个水平。

拟水平设计 $U_6(3^2 \times 2^1)$

试验号	列号		
	1	2	3
1	(1)1	(2)1	(3)1
2	(2)1	(4)2	(6)2
3	(3)2	(6)3	(2)1
4	(4)2	(1)1	(5)2
5	(5)3	(3)2	(1)1
6	(6)3	(5)3	(4)2

又例如要安排一个二因素(A, B)五水平和一因素(C)二水平的试验，这项试验若用正交设计，可用 L_{50} 表，但试验次数太多；若用均匀设计来安排，可用混合水平均匀表 $U_{10}(5^2 \times 2^1)$ ，只需要进行10次试验。

拟水平设计 $U_{10}(5^2 \times 2^1)$

试验号	A	B	C
1	(1)1	(2)1	(5)1
2	(2)1	(4)2	(10)2
3	(3)2	(6)3	(4)1
4	(4)2	(8)4	(9)2
5	(5)3	(10)5	(3)1
6	(6)3	(1)1	(8)2
7	(7)4	(3)2	(2)1
8	(8)4	(5)3	(7)2
9	(9)5	(7)4	(1)1
10	(10)5	(9)5	(6)2

4. 均匀试验设计的步骤

- 1、明确试验目的，确定试验指标；
- 2、选因素；
- 3、确定因素的水平；
- 4、选择均匀设计表。这是均匀设计很关键的一步，一般根据试验的因素数和水平数来选择，并首选 U_n 表。但是，这里要特别注意，为了便于试验结果数据的统计处理，**试验次数一定不要小于因素数的两倍**。这就是说如果是3因素的问题，必须选用表或者是 n 大于6以上的均匀设计表，做6次以上的试验：因为有些多元回归分析，在试验次数小于因素数的2倍时、就不便进行数据处理。此外，试验次数太少，获得的相关信息量也太少。

- 5、进行表头设计；
- 6、明确试验方案，进行试验。试验方案的确定与正交试验设计类似。
- 7、试验结果统计分析。由于均匀表没有整齐可比性，试验结果不能用方差分析法，可采用直观分析法和回归分析方法。
 - ① 直观分析法：如果试验目的只是为了寻找一个可行的试验方案或确定适宜的试验范围，就可以采用此法，直接对所得到的几个试验结果进行比较，从中挑出试验指标最好的试验点。由于均匀设计的试验点分布均匀，用上述方法找到的试验点一般距离最佳试验点不会很远，所以该法是一种非常有效的方法。
 - ② 回归分析法：均匀设计的回归分析一般为多元回归分析计算量很大，一般需借助相关的计算机软件进行分析计算。