第三章　弹性力学基本理论与方法

§3-1 概述

■ 岩石力学（工程力学）问题求解特点：

依据：边界约束条件
平衡微分方程
几何方程（形变与位移间几何关系）
物理方程（应力与形变间物理关系）

求解：应力分量、形变分量和位移分量

目的：研究结构强度、稳定性、破坏、失效等

§3-1 概述

■ 弹性力学基本假设：

（1）连续性假设
（2）完全弹性假设
（3）均匀性假设
（4）各向同性假设
（5）小变形假设

§3-1 概述

■ 弹性力学基本假设1—连续性假设

假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。

基于连续性假设，物体内的一些物理量，例如应力、形变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。

§3-1 概述

■ 弹性力学基本假设2—完全弹性假设

弹性，指的是“物体在引起形变的外力被除去以后能恢复原形”这一性质。

完全弹性，指的是物体能完全恢复原形而没有任何剩余形变。

满足完全弹性假设，物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力，与它过去的受力情况无关。完全弹性体服从虎克定律，也就是形变与引起该形变的应力成正比，因而弹性常数不随应力或形变的大小而变。

§3-1 概述

■ 弹性力学基本假设3—均匀性假设

整个物体是由同一材料组成的。

基于均匀性假设，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性才不随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析的结果用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，例如混凝土，那么，也只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内均匀分布，这个物体就可以当作是均匀的。

§3-1 概述

■ **弹性力学基本假设4—各向同性假设**

物体的弹性在所有各个方向都相同。

基于各向同性假设，物体的弹性常数才不随方向而变。显然，由木材和竹材做成的构件都不能当作各向同性体。至于由钢材做成的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以，钢材构件的弹性（包含无数多微小晶体随机排列时的统观弹性），大致是各向同性的。

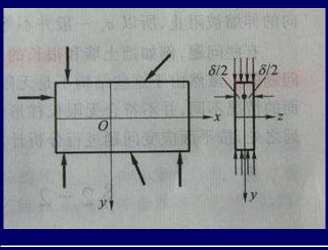
§3-1 概述

■ **弹性力学基本假设5—小变形假设**

假定物体受力以后各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且转角都远小于1。

基于小变形假设，在建立物体变形以后的平衡方程时，用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著误差；并且，在考察物体的形变及位移时，转角和应变的二次方或乘积都可以略去不计。这就使得弹性力学里的代数方程和微分方程都简化为线性方程，而且可以应用叠加原理。

§3-1 概述



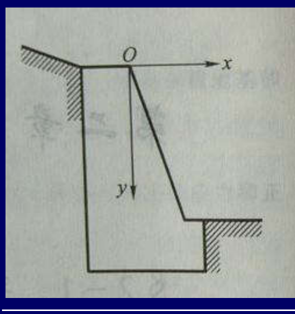
■ **平面应力问题**

特点：

（1）$\sigma_z=0$，$\tau_{zx}=0$， $\tau_{zy}=0$。

（2）σ_x、σ_y、τ_{xy}只是x和y的函数，不随z而变化。

§3-1 概述



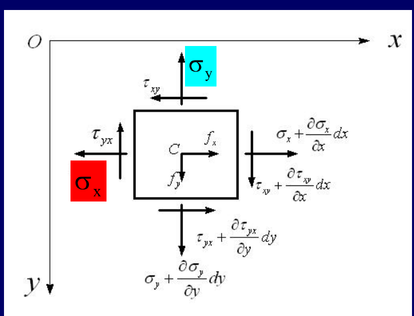
■ **平面应变问题**

特点：

（1）$\varepsilon_z=0$，$\gamma_{zx}=0$， $\gamma_{zy}=0$。

（2）ε_x、ε_y、γ_{xy}只是x和y的函数，不随z而变化。

§3-2 基本方程—平衡微分方程

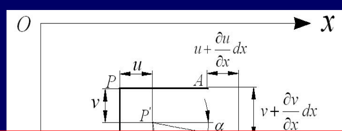


■ 平面平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}$$

§3-2 基本方程—几何方程

■ **平面问题的几何方程：**



$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

注意：

当物体的位移分量完全确定时，形变分量即完全确定。

反之，当形变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。（必须有三个适当的刚体约束条件）

§3-2 基本方程——物理方程

1、广义胡克定律：

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy},\gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},\gamma_{xz}=\frac{1}{G}\tau_{xz}
\end{aligned}\right\}$$

§3-2 基本方程——物理方程

2、平面应力问题的物理方程：

$\sigma_z=0$，$\tau_{zx}=0$， $\tau_{zy}=0$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy},\gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},\gamma_{xz}=\frac{1}{G}\tau_{xz}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\sigma_y\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\sigma_x\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}$$

§3-2 基本方程——物理方程

3、平面应变问题的物理方程：

$\varepsilon_z=0$，$\gamma_{zx}=0$， $\gamma_{zy}=0$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)\right]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{1}{G}\tau_{xy},\gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},\gamma_{xz}=\frac{1}{G}\tau_{xz}
\end{aligned}\right\}$$

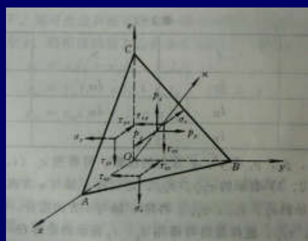
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right]\\
\varepsilon_y&=\frac{1-\mu^2}{E}\left[\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right]\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}$$

§3-3 边界条件

1、应力边界条件

知物体边界面力p（p_x，p_y，p_z）

建立物体边界微单元应力与边界面力p和边界方向余弦（λ_x，λ_y，λ_z）的关系。



2.2.1 从一般空间应力状态求任意斜截面上的应力

所以，abc面上的牵引力分量与x、y、z坐标系下的应力矩阵和abc面外法线的方向余弦的关系表达式为：

$$\begin{bmatrix}t_x\\t_y\\t_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x&\tau_{xy}&\tau_{xz}\\\tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{yz}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_x\\\lambda_y\\\lambda_z\end{bmatrix}$$ 或 $$[t]=[\sigma][\lambda]$$

§3-3 边界条件

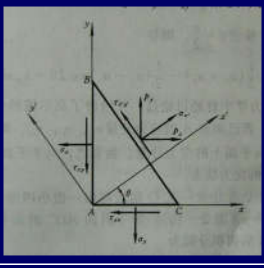
应力边界条件（在S_σ上）：

$$\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x&\tau_{xy}&\tau_{xz}\\\tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{yz}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_x\\\lambda_y\\\lambda_z\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
p_x&=\sigma_x\lambda_x+\tau_{xy}\lambda_y+\tau_{xz}\lambda_z\\
p_y&=\tau_{xy}\lambda_x+\sigma_y\lambda_y+\tau_{yz}\lambda_z\\
p_z&=\tau_{xz}\lambda_x+\tau_{yz}\lambda_y+\sigma_z\lambda_z
\end{aligned}\right\}$$

§3-3 边界条件

平面问题的应力边界条件（在S_σ上）：



$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma_x\lambda_x + \tau_{xy}\lambda_y \\ p_y &= \tau_{xy}\lambda_x + \sigma_y\lambda_y \end{aligned}\right\}$$

§3-3 边界条件

2、位移边界条件（在S_u上）：

知物体边界上位移

建立物体边界上点的位移与给定位移相等的条件。

$$u=\bar{u}, v=\bar{v}, w=\bar{w}$$

§3-3 边界条件

3、混合边界条件：

知物体边界上部分应力、给定位移

建立物体边界上点的应力边界条件、位移边界条件。

§3-2 基本方程—平衡微分方程

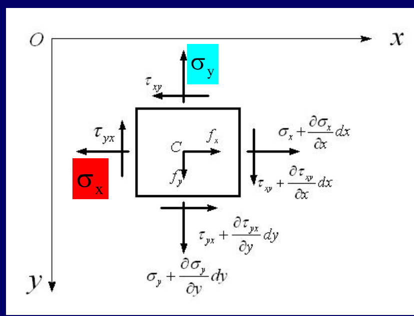


图3-2

§3-3 边界条件

4、圣维南原理及其应用

如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同），那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

§3-4 按位移求解平面问题

1、平衡微分方程：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial y}+f_x=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial x}+f_y=0 \end{cases}$$

2、几何方程：$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}$

3、平面应力物理方程：
$$\begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases}$$

4、边界条件：
$$\begin{cases} (u)_S=\bar{u}(s), (v)_S=\bar{v}(s) \\ (l\cdot\sigma_x+m\cdot\tau_{xy})_S=\bar{f}_x(s) \\ (m\cdot\sigma_y+l\cdot\tau_{xy})_S=\bar{f}_y(s) \end{cases}$$

位移法是以位移分量为基本未知函数，从基本方程和边界条件中消去应力分量和形变分量，导出只含位移分量的方程和相应的边界条件，并由此解出位移分量，然后再求出形变分量和应力分量。

§3-4 按位移求解平面问题

1、用位移分量表示应力分量：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}
$$

1、平衡微分方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial y}+f_x=0\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial x}+f_y=0\end{cases}$

2、几何方程：$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}$

3、平面应力物理方程：$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases}$

§3-4 按位移求解平面问题

2、用位移分量表示的平衡微分方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0\\
\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}
$$

平衡微分方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial y}+f_x=0\\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial x}+f_y=0\end{cases}$

§3-4 按位移求解平面问题

3、用位移分量表示的边界条件：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_x+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\lambda_y\right]=\overline{f}_x\\
\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\lambda_x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda_y\right]=\overline{f}_y
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{f}_x&=\sigma_x\lambda_x+\tau_{xy}\lambda_y\\
\overline{f}_y&=\tau_{xy}\lambda_x+\sigma_y\lambda_y
\end{aligned}\right\}
$$

§3-4 按位移求解平面问题

$$u=\overline{u},v=\overline{v}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0\\
\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_x+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\lambda_y\right]=\overline{f}_x\\
\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\lambda_x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda_y\right]=\overline{f}_y
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}\right\}
$$

- 平衡方程
- 边界条件1,2
- 几何方程
- 物理方程

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}
$$

§3-4 按位移求解平面问题

4、位移法特点：

（1）能够适应各种边界条件问题的求解；

（2）求解位移函数困难（已得出的函数解答很少）。

（3）在各种近似数值解法中广泛应用。

§3-5 按应力求解平面问题

按应力求解的方法，称应力法。

它是以应力分量为基本未知函数，从方程和边界条件中消去位移分量和形变分量，导出只含应力分量的方程和相应的边界条件，并由此解出应力分量，然后再求出形变分量和位移分量。

§3-5 按应力求解平面问题

1、应变分量表示的几何方程（形变协调方程、相容方程）

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

求ε_x对y的二阶导数；
求ε_y对x的二阶导数；

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

§3-5 按应力求解平面问题

1、应变分量表示的几何方程（形变协调方程、相容方程）

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

连续体的形变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}不是互相独立的，而是相关的，它们之间必须满足相容方程，才能保证对应的位移分量u和v的存在。

§3-5 按应力求解平面问题

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

2、用应力分量表示的相容方程：

$$\left\{\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right.$$

平面应力情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

平面应变情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{aligned}\right.$$

§3-5 按应力求解平面问题

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}$$

平面应力情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

平面应变情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}p_x=\sigma_x\lambda_x+\tau_{xy}\lambda_y\\ p_y=\tau_{xy}\lambda_x+\sigma_y\lambda_y\end{aligned}\right\}$$

- 平衡方程；
- 相容方程；
- 边界条件。

§3-5 按应力求解平面问题

- 单连体：只有一个连续边界的物体

- 多连体：具有两个或两个以上的连续边界的物体。（还必须满足位移单值条件）

§3-5 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化 应力函数：

平面应力情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

平面应变情况：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

在常体力情况，即体力分量是常量，不随坐标x、y而变下，两种平面问题的相容方程都简化为：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

§3-5 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化　应力函数：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

§3-7 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化　应力函数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

$$\left.\begin{aligned}p_x&=\sigma_x\lambda_x+\tau_{xy}\lambda_y\\ p_y&=\tau_{xy}\lambda_x+\sigma_y\lambda_y\end{aligned}\right\}$$

- 平衡方程；
- 相容方程；
- 边界条件。

§3-7 按应力求解平面问题

当体力为常量时，在单连体的应力边界问题中，如果两个弹性体具有相同的边界形状，并受到同样分布的外力，那么，就不管这两个弹性体的材料是否相同，也它们是在平面应力情况或是在平面应变情况下，应力分量的分布是相同的；

但是，两种平面问题中的应力分量，以及形变和位移却不一定相同。

§3-7 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化　应力函数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}$$

平衡方程是一个非齐次微分方程组，它的解答包括它的任意一个特解和对应齐次微分方程的通解。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$$

§3-7 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化　应力函数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{aligned}\right\}$$

特解：$\sigma_x=-f_x x$，$\sigma_y=-f_y y$，$\tau_{xy}=0$；

或：$\sigma_x=0$，$\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=-f_x y-f_y x$；

或：$\sigma_x=-f_x x-f_y y$；$\sigma_y=-f_x x-f_y y$；$\tau_{xy}=0$；

等等

§3-5 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化　应力函数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$$

求解齐次方程通解需要用到“偏导数具有相容性”微分方程理论：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

§3-5 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化 应力函数：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{cases}$$

通解：称Φ为平面问题的应力函数，又称艾里应力函数。

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

§3-5 按应力求解平面问题

3、常体力情况下的简化 应力函数：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

代入相容方程，得到：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=0$$

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0\text{（应力函数相容方程）}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Phi=0\text{或}\nabla^4\Phi=0$$

§3-5 按应力求解平面问题

conclusion: 按应力求解平面问题，可以归纳为求解一个应力函数Φ，它必须满足相容方程，边界条件；在多连体中，还必须满足位移单值条件。从上述条件求解出应力函数Φ后，便可依次求出应力分量，应变分量和位移分量。

§3-5 按应力求解平面问题

4、逆解法与半逆解法 多项式解答

▲ 逆解法：先设定各种形式的、满足相容方程的应力函数，再由此求得应力分量，然后根据边界条件，看这些应力分量对应于边界上什么样的面力，从而得知所选取应力函数可以解决的问题。

讨论：

$$\Phi=a+bx+cy;$$
$$\Phi=ax^2+bxy+cy^2;$$
$$\Phi=ay^3.$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

§3-5 按应力求解平面问题

4、逆解法与半逆解法 多项式解答

▲ 半逆解法：先针对所要求解的问题，根据弹性体的边界形状和受力情况，假设部分或全部应力分量的函数形式；并推出应力函数形式；然后代入相容方程，求出应力函数的具体表达式；再求出应力分量，并考察其是否满足全部边界条件。直到所有条件全部满足。

§3-5 按应力求解平面问题

1、平衡微分方程：$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial y}+f_x=0\\[2mm]\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{XY}}{\partial x}+f_y=0\end{cases}$

2、几何方程：$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}$

3、平面应力物理方程：$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\[2mm]\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\[2mm]\gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases}$

4、边界条件：$\begin{cases}(u)_S=\bar{u}(s),(v)_S=\bar{v}(s)\\(l\cdot\sigma_x+m\cdot\tau_{xy})_S=\bar{f}_x(s)\\(m\cdot\sigma_y+l\cdot\tau_{xy})_S=\bar{f}_y(s)\end{cases}$

艾里应力函数Φ

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0$$

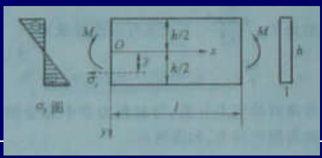
$$\nabla^2\nabla^2\Phi=0\text{或}\nabla^4\Phi=0$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

§3-5 按应力求解平面问题

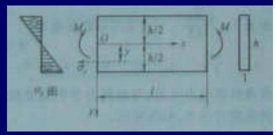
5、矩形梁的纯弯曲

设有矩形截面的长梁（长度L 远大于深度h），它的宽度远小于深度和长度（近似平面应力问题）或者远大于深度和长度（近似平面应变问题），在两端受相反的力偶而弯曲，体力可以不计。



§3-5 按应力求解平面问题

5、矩形梁的纯弯曲



解：采用逆解法。

（1）设定应力函数：$\Phi=ay^3$；

（2）求应力分量：

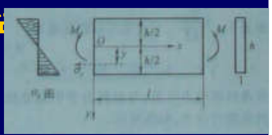
$\sigma_x=6ay$； $\sigma_y=0$； $\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$

（3）考察边界条件，定系数：

$$\begin{cases}(u)_s=\bar{u}(s),(v)_s=\bar{v}(s)\\(l\cdot\sigma_x+m\cdot\tau_{xy})_s=\bar{f}_x(s)\\(m\cdot\sigma_y+l\cdot\tau_{xy})_s=\bar{f}_y(s)\end{cases}$$

上下边界： $(\sigma_y)_{y=\pm h/2}=0$； $(\tau_{xy})_{y=\pm h/2}=0$

§3-5 按应力求解平面问题



5、矩形梁的纯弯曲

解：（3）考察边界条件，定系数：

$$\begin{cases}(u)_s=\bar{u}(s),(v)_s=\bar{v}(s)\\(l\cdot\sigma_x+m\cdot\tau_{xy})_s=\bar{f}_x(s)\\(m\cdot\sigma_y+l\cdot\tau_{xy})_s=\bar{f}_y(s)\end{cases}$$

左右端边界： $(\tau_{xy})_{x=0}=0$；

$(\tau_{xy})_{x=l}=0$；

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=0,l}\,dy=0 \qquad 6a\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y\,dy=0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=0,l}\,y\,dy=M \qquad 6a\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2\,dy=M$$

$$a=\frac{2M}{h^3}$$

$\sigma_x=6ay$； $\sigma_y=0$； $\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$

§3-5 按应力求解平面问题

5、矩形梁的纯弯曲

解：（4）求取应力： $a=\dfrac{2M}{h^3}$

$\sigma_x=6ay=12My/h^3=My/I$； $\sigma_y=0$； $\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$

讨论！

§3-5 按应力求解平面问题

5、矩形梁的纯弯曲

解：（5）求取形变分量：

将上述应力分量代入物理方程，解之得形变分量：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases}$$

$$\sigma_x=\frac{M}{I}y$$

$$\varepsilon_x=\frac{M}{EI}y,\ \varepsilon_y=-\mu\frac{M}{EI}y,\ \gamma_{xy}=0$$

§3-5 按应力求解平面问题

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

5、矩形梁的纯弯曲

解：（6）求取位移分量：

将上述形变分量代入几何方程，得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{M}{EI}y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\mu\frac{M}{EI}y,\ \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

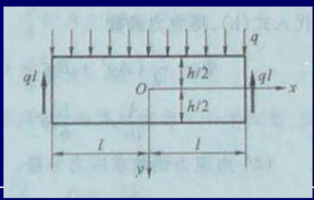
…… 最后根据边界条件得：

$$u=\frac{M}{EI}\left(x-\frac{l}{2}\right)y,\ v=\frac{M}{2EI}(l-x)x-\frac{\mu M}{2EI}y^2$$

§3-5 按应力求解平面问题

6、简支梁受均布荷载

设有矩形截面的简支梁，宽度为1个单位，深度为h，长度为2l，体力可以不计，受均布荷载q，由两端的反力ql 维持平衡。



§3-5 按应力求解平面问题

6、简支梁受均布荷载

解：应用半逆解法求解。

（1）假设应力分量的函数形式：$\sigma_y=f(y)$

（2）推求应力函数形式：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=f(y)$$

$$\Phi=\frac{x^2}{2}f(y)+xf_1(y)+f_2(y)$$

§3-5 按应力求解平面问题

6、简支梁受均布荷载

解：（3）由相容方程求解应力函数：

$$\Phi=\frac{x^2}{2}(Ay^3+By^2+Cy+D)+x(Ey^3+Fy^2+Gy)-$$
$$-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Hy^3+Ky^2$$

§3-7 按应力求解平面问题

6、简支梁受均布荷载

解：（4）由应力函数求应力分量：

$$\sigma_x=\frac{x^2}{2}(6Ay+2B)+x(6Ey+2F)-2Ay^3-2By^2+6Hy+2K$$
$$\sigma_y=Ay^3+By^2+Cy+D$$
$$\tau_{xy}=-x(3Ay^2+2By+C)-(3Ey^2+2Fy+G)$$

§3-5 按应力求解平面问题

$$\sigma_x=\frac{x^2}{2}(6Ay+2B)+x(6Ey+2F)-2Ay^3-2By^2+6Hy+2K$$
$$\sigma_y=Ay^3+By^2+Cy+D$$
$$\tau_{xy}=-x(3Ay^2+2By+C)-(3Ey^2+2Fy+G)$$

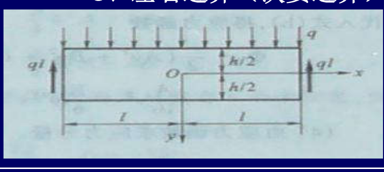
6、简支梁受均布荷载

解：（5）考察边界条件：

a、对称性 E=F=G=0

b、上下边界（主要边界）

c、左右边界（次要边界）



§3-5 按应力求解平面问题

$$\sigma_x=\frac{x^2}{2}(6Ay+2B)-2Ay^3-2By^2+6Hy+2K$$
$$\sigma_y=Ay^3+By^2+Cy+D$$
$$\tau_{xy}=-x(3Ay^2+2By+C)$$

6、简支梁受均布荷载

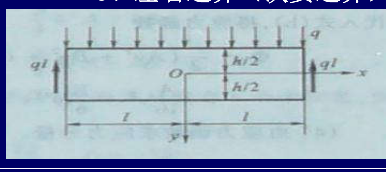
解：（5）考察边界条件：

a、对称性 E=F=G=0

b、上下边界（主要边界）

c、左右边界（次要边界）

$$A=-\frac{2q}{h^3}$$
$$B=0$$
$$C=\frac{3q}{2h}$$
$$D=-\frac{q}{2}$$



§3-5 按应力求解平面问题

$$\sigma_x=\frac{x^2}{2}(6Ay+2B)-2Ay^3-2By^2+6Hy+2K$$
$$\sigma_y=Ay^3+By^2+Cy+D$$
$$\tau_{xy}=-x(3Ay^2+2By+C)$$

6、简支梁受均布荷载

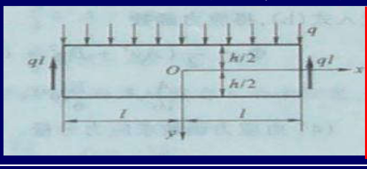
解：（5）考察边界条件：

a、对称性 E=F=G=0

b、上下边界（主要边界）

c、左右边界（次要边界）

对比材料力学解答！



$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y&=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}&=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{aligned}\right\}$$