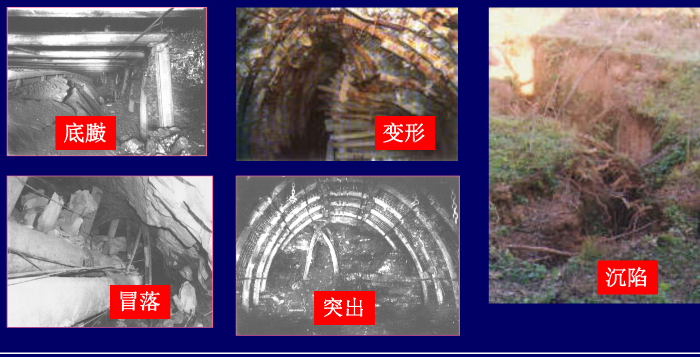
第二章　应力与应变

部分矿山岩体变形、破坏形式



2.2 体力和面力

■ **体力：**

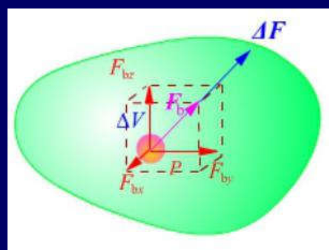
分布在物体整个体积内部各个质点上的力，又称为质量力。

例如物体的重力，惯性力，电磁力等等。

2. 2 体力和面力

为了表明物体在*xyz* 坐标系内任意一点*P* 所受体力的大小和方向，在*P*点的邻域取一微小体积元素⊿*V*, 如图所示 。设⊿*V* 的体力合力为⊿*F*，则*P*点的体力平均集度为：

$$\frac{\Delta F}{\Delta V} = \mathbf{F}_b$$



令微小体积元素⊿*V* 趋近于0，则可以定义一点*P*的体力为：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = \mathbf{F}_b$$

2. 2　体力和面力

- 一般来讲，物体内部各点处的体力是不相同的。
- 物体内任一点的体力用***Fb***表示，称为体力矢量，其方向由该点的体力合力方向确定。
- 体力沿三个坐标轴的分量用***Fbi***(***i*** = 1,2,3)或者***Fbx***,***Fby***,***Fbz*** 表示，称为体力分量。体力分量的方向规定与坐标轴方向一致为正，反之为负。
- 在弹性力学中，体力是指单位体积的力。它们的因次是

$$[力][长度]^{-3}$$

2.2 体力和面力

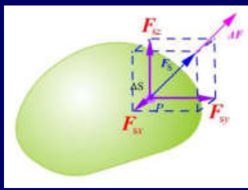
■ **面力：**

分布在物体表面上的力称面力。

例如风力，静水压力，物体之间的接触力等。

2.2 体力和面力

- 对于物体表面上的任一点*P*，在*P* 点的邻域取一包含*P*点的微小面积元素ΔS，如图所示。设ΔS 上作用的面力合力为 ΔF，则*P* 点的面力定义：
- 面力矢量是单位面积上的作用力，面力是弹性体表面坐标的函数。一般条件下，面力边界条件是弹性力学问题求解的主要条件。
- 面力矢量用*Fs*表示，其分量用*Fsi*（*i*=1，2，3）或者*Fsx*、*Fsy*和*Fsz*表示。
- 面力的方向规定以与坐标轴方向一致为正，反之为负



$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \mathbf{F}_s$$

[力][长度]$^{-2}$

2.2 体力和面力

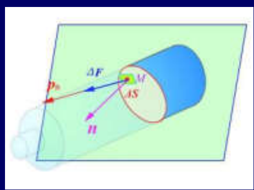
■ **内力：** 物体在外界因素作用下，物体内部各个部分之间将产生相互作用，物体内部相互作用力称为内力。

内力的计算可以采用截面法，即利用假想平面将物体截为两部分，将希望计算内力的截面暴露出来，通过平衡关系计算截面内力*F*。

■ **应力：** 指单位面积的内力。

2.2 体力和面力

- 内力的分布一般是不均匀的。为了描述任意一点*M*的内力，在截面上选取一个包含*M*的微面积单元ΔS，如图所示。则可认为微面积上的内力主矢ΔF的分布是均匀的。设ΔS 的法线方向为*n*，则定义：
- 上式中*pn*为微面积ΔS 上的平均应力。如果令ΔS 逐渐减小，并且趋近于零，取极限可得：
- *pn*是通过任意点*M*，法线方向为*n*的微分面上的应力矢量。



$$p_n = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$p_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

[力][长 度]$^{-2}$

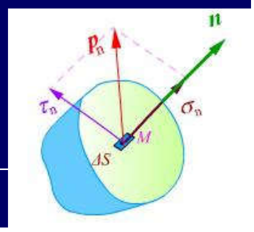
2.2 体力和面力

■ 正应力σ：应力在其作用截面的法线方向的分量，称正应力。

■ 切应力τ：应力在其作用截面的切线方向的分量，称切应力。

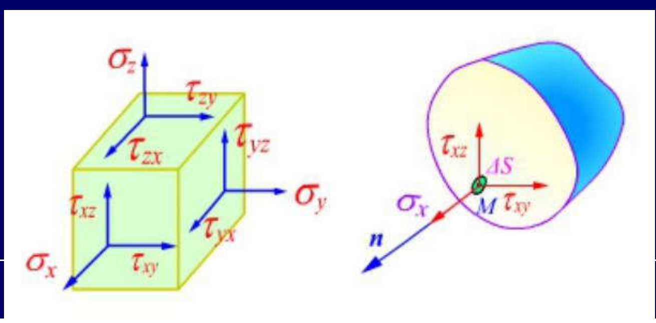
弹性体的强度与正应力和切应力息息相关，因此这是工程结构分析中经常使用的应力分解形式。

由于微分面法线 *n* 的方向只有一个，因此说明截面方位就确定了正应力 σ_n的方向。但是平行于微分面的方向有无穷多，因此切应力τ_n不仅需要确定截面方位，还必须指明方向。



2.2 体力和面力

为表达物体内部任意一点*M* 的应力状态，利用三个与坐标轴方向一致的微分面，通过*M*点截取一个微小的正平行六面体单元



2.2 体力与面力

■ **正面：** 外法线沿着坐标轴的正方向的截面。
正面上应力正负规定：沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为负。

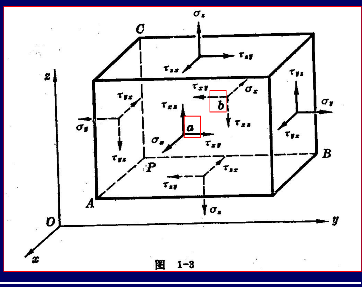
■ **负面：** 外法线是沿着坐标轴的负方向的截面。
负面上应力正负规定：沿坐标轴正向为负，沿坐标轴负向为正。

■ 切应力互等性：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的，即大小相等，正付号相同。

2.2 体力与面力

一点的应力状态：6个独立应力分量定义。

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

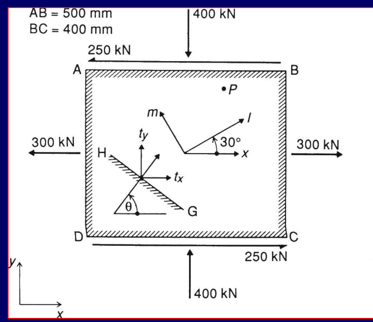


例题2-1：

知：矩形板边缘上均布着给定的荷载。板厚b=50mm, 边AB=500mm, BC=400mm。

求:（1） 确定BC、DA边上为保持板平衡必须作用的剪力。

（2） 相对于x， y参考轴，确定板内任一点P的应力状态。



解：

（2）相对于x、y参考轴：

$\sigma_x = P_{BC}/$（b × BC）

=300/（1000 × 0.05×0.4）= 15 MPa；

$\sigma_y = P_{AB}/$（b × AB）

=－400/（1000 × 0.05×0.5）=－16 MPa；

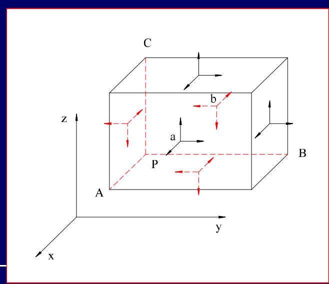
$\tau_{xy} = T_{AB}/$（b × AB）

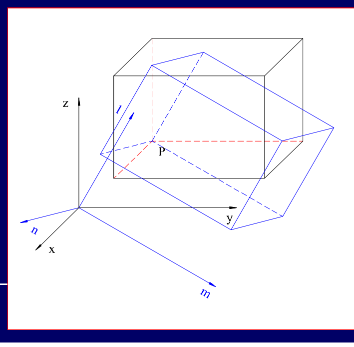
=－250/（1000 × 0.05×0.5）=－10 MPa。

2.3 应力变换

问：已知在（X，Y，Z）坐标系下一点的6个应力分量，

如何求得该点在（l，m，n）坐标系下的6个应力分量？





2.3 应力变换

旧坐标系（x，y，z）

新坐标系（l，m，n）

其中，l，m，n轴相对于旧坐标的方向余弦分别为：

（l_x，l_y，l_z）

（m_x，m_y，m_z）

（n_x，n_y，n_z）

一点应力状态，对于旧坐标系[σ]，对于新坐标系[σ*]

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

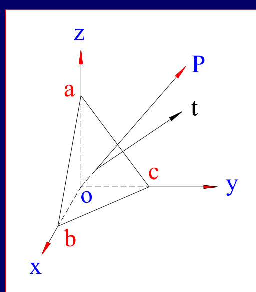
$$[\sigma^*]=\begin{bmatrix}\sigma_l & \tau_{lm} & \tau_{ln}\\ \tau_{lm} & \sigma_m & \tau_{mn}\\ \tau_{ln} & \tau_{mn} & \sigma_n\end{bmatrix}$$

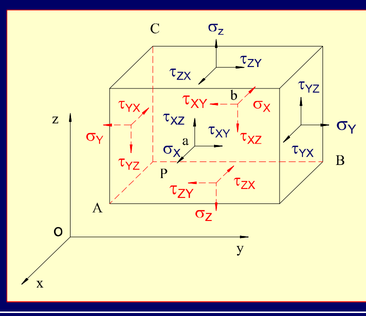
如何用[σ]和 l，m，n轴相对于旧坐标轴的方向余弦表示[σ*]？

2.3 应力变换

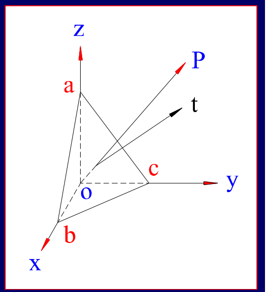
OP：abc面的外法线，其方向余弦（λ_X，λ_Y，λ_Z）。

t：切去部分在abc面的平衡应力。





2.3.1 从一般空间应力状态求任意斜截面上的应力



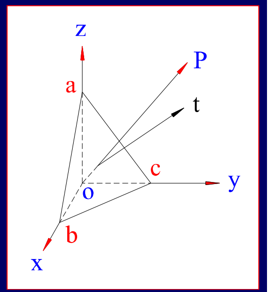
假设abc面的外法线OP由用方向余弦（λ_x、λ_y、λ_z）的行矢量定义。

如果的面积为A，abc在其法线分别为x、y、z轴的各平面上的投影面积由下式给出：

Oac面=A_x=$A\lambda_x$，Oab面=A_y=$A\lambda_y$，**Obc**面=A_z=$A\lambda_z$

假定牵引力矢量t的分量为t_x、t_y、t_z。

2.3.1 从一般空间应力状态求任意斜截面上的应力



利用x方向的静力平衡条件得出：

$t_x A - \sigma_x A\lambda_x - \tau_{xy}A\lambda_y - \tau_{zx}A\lambda_z=0$

即：　$t_x=\sigma_x\lambda_x + \tau_{xy}\lambda_y + \tau_{zx}\lambda_z$

同理可推出：对于y、z方向对应的关于t_y、t_z的表达式：

$t_y= \tau_{xy}\lambda_x + \sigma_y \lambda_y + \tau_{yz}\lambda_z$

$t_z= \tau_{xz}\lambda_x + \tau_{yz} \lambda_y + \sigma_z\lambda_z$

2.3.1 从一般空间应力状态求任意斜截面上的应力

所以，abc面上的牵引力分量与x、y、z坐标系下的应力矩阵和abc面外法线的方向余弦的关系表达式为：

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix}$$ 或 $$[t]=[\sigma][\lambda]$$

2.3.1 从一般空间应力状态求任意斜截面上的应力

同理，abc面上的牵引力分量与l、m、n坐标系下的应力矩阵和abc面外法线的方向余弦的关系表达式为：

$$\begin{bmatrix} t_l \\ t_m \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lm} & \tau_{ln} \\ \tau_{lm} & \sigma_m & \tau_{mn} \\ \tau_{ln} & \tau_{mn} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_l \\ \lambda_m \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$ 或 $$[t^*]=[\sigma^*][\lambda^*]$$

2.3.2 坐标变换对应的应力变换方程

根据矢量分析，矢量[V]按照如下变换方程从一组正交参考坐标x、y、z变换到另一组参考坐标l、m、n。

$$\begin{bmatrix} v_l \\ v_m \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$ 或 $$[V^*]=[R][V]$$

上式中，[R]为旋转矩阵，该矩阵的行可看作是由新轴相对于旧轴的方向余弦的行矢量组成的。该旋转矩阵的唯一性性质是其逆阵等于它的转置，即：$[R]^{-1}=[R]^T$

2.3.2 坐标变换对应的应力变换方程

利用上述旋转矩阵的性质，再看[t]和[t*]、[λ]和[λ*]之间的关系式：

$[t^*]=[R][t]$　　或　$[t]=[R]^T[t^*]$

$[\lambda^*]=[R][\lambda]$　　或　$[\lambda]=[R]^T[\lambda^*]$

则：　$[t^*]=[R][t] =[R][\sigma][\lambda] = [R][\sigma][R]^T[\lambda^*]$

由于：　$[t^*]= [\sigma^*]\ [\lambda^*]$

于是：　$[\sigma^*]=[R][\sigma][R]^T$（应力变换方程）

2.3.2 坐标变换对应的应力变换方程

应力变换方程扩展式：

$$\begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lm} & \tau_{ln} \\ \tau_{lm} & \sigma_m & \tau_{mn} \\ \tau_{ln} & \tau_{mn} & \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

坐标变换情况下应力分量的显式表达：

$\sigma_l = l_x^2\sigma_x + l_y^2\sigma_y + l_z^2\sigma_z + 2(l_x l_y \tau_{xy} + l_y l_z \tau_{yz} + l_x l_z \tau_{xz})$

$\tau_{lm} = l_x m_x \sigma_x + l_y m_y \sigma_y + l_z m_z \sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x)\tau_{xy}$
$+ (l_y m_z + l_z m_y)\tau_{yz} + (l_z m_x + l_x m_z)\tau_{xz}$

2.3.2 坐标变换对应的应力变换方程

坐标变换情况下应力分量的显式表达：

$\sigma_m = m_x^2\sigma_x + m_y^2\sigma_y + m_z^2\sigma_z + 2(m_x m_y \tau_{xy} + m_y m_z \tau_{yz} + m_x m_z \tau_{xz})$

$\tau_{mn} = m_x n_x \sigma_x + m_y n_y \sigma_y + m_z n_z \sigma_z + (m_x n_y + m_y n_x)\tau_{xy}$
$+ (m_y n_z + m_z n_y)\tau_{yz} + (m_z n_x + m_x n_z)\tau_{xz}$

$\sigma_n = n_x^2\sigma_x + n_y^2\sigma_y + n_z^2\sigma_z + 2(n_x n_y \tau_{xy} + n_y n_z \tau_{yz} + n_x n_z \tau_{xz})$

$\tau_{ln} = l_x n_x \sigma_x + l_y n_y \sigma_y + l_z n_z \sigma_z + (l_x n_y + l_y n_x)\tau_{xy}$
$+ (l_y n_z + l_z n_y)\tau_{yz} + (l_z n_x + l_x n_z)\tau_{xz}$

2. 4 应力不变量

- 主平面：指剪应力分量为零的平面。
- 主应力：作用在主平面上的正应力。
- 主应力轴方向：主平面的外法线方向。

对于任何一点的应力状态，都可以找到三对相互垂直的主平面，主平面上作用着三个主应力：

σ_1（最大主应力，major principal stress）
σ_2（中间主应力, intermediate principal stress ）
σ_3（最小主应力, minor principal stress ）
按照代数值的大小排列为： $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

2. 4 应力不变量

设图2-4(2)切割面正是一个主平面：

牵引力 $t=\sigma_p$；
外法线（λ_x，λ_y，λ_z）
牵引力分量：

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \sigma_p \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix}$$

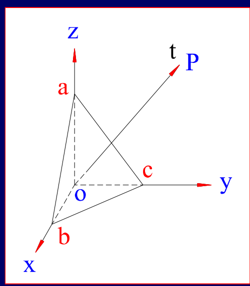


图2-4(2) 确定应力变换方程、主应力及其方向的割离体图

2. 4 应力不变量

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = [0]$$

三个联立齐次线性方程组：根据高等数学中有关线性组的理论，该方程组有非零解的必要与充分条件是这个方程组的系数行列式Δ=0。

2. 4 应力不变量

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0$$

2.4 应力不变量

I_1、I_2、I_3分别称为第一、第二、第三应力不变量，它们由下式定义：

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$
$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)$$
$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{zx}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2)$$

2.4 应力不变量

主应力的方向余弦：

$$A=\begin{vmatrix}\sigma_y-\sigma_1 & \tau_{yz}\\ \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_1\end{vmatrix}$$
$$B=-\begin{vmatrix}\tau_{xy} & \tau_{yz}\\ \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_1\end{vmatrix}$$
$$C=\begin{vmatrix}\tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_1\\ \tau_{xz} & \tau_{yz}\end{vmatrix}$$
$$\lambda_{x1}=A/\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{1}{2}},\lambda_{y1}=B/\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{1}{2}},\lambda_{z1}=C/\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.4 应力不变量

主应力轴之间正交：

检验正交性的条件是方向余弦矢量的三个点积的每一个必须为零，即：

$$\lambda_{x1}\lambda_{x2}+\lambda_{y1}\lambda_{y2}+\lambda_{z1}\lambda_{z2}=0$$
$$\lambda_{x2}\lambda_{x3}+\lambda_{y2}\lambda_{y3}+\lambda_{z2}\lambda_{z3}=0$$
$$\lambda_{x1}\lambda_{x3}+\lambda_{y1}\lambda_{y3}+\lambda_{z1}\lambda_{z3}=0$$

2.4 应力不变量

球形（静水）分量与偏斜分量：

$$[\sigma_m]=\begin{bmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{bmatrix},\sigma_m=\frac{1}{3}I_1$$
$$[S]=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_m\end{bmatrix}$$

偏斜主应力：

$$S_1=\frac{1}{3}(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)=\sigma_1-\sigma_m$$
$$S_2=\frac{1}{3}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)=\sigma_2-\sigma_m$$
$$S_3=\frac{1}{3}(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2)=\sigma_3-\sigma_m$$

2.4 应力不变量

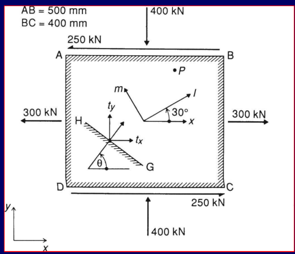
应力偏量不变量：

$$[S]=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_m\end{bmatrix}$$

$$J_1=0$$
$$J_2=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$
$$J_3=\frac{1}{27}(\tau_{xy}+\tau_{xz})(\tau_{yx}+\tau_{yz})(\tau_{zx}+\tau_{zy})$$

2.5 平面问题和双轴应力

例题2-1：知矩形板边缘上均布着给定的荷载。板厚50mm, 长500mm, 长400mm。



求：

(3) 对于所示的l，m轴，确定应力分量。

(4) 确定最大主应力值和最大主应力轴相对x轴的方向。

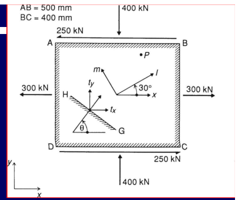
(5) 对于GH面，其外法线对轴的倾角为θ。确定作用在该面上的σ_x、σ_y、τ_{xy}和θ的函数表达式，并分别给出θ=0°、60°、90°时的值。给出θ=60°时的平面合应力。

解:

σ_x= 15 MPa

σ_y=– 16 MPa

τ_{xy}= –10 MPa



（3）l轴的方向余弦：l_x=cos30° =0.866

l_y=cos60° =0.5

m轴的方向余弦：m_x=cos120° = –0.5

m_y=cos30° =0.866

所以，

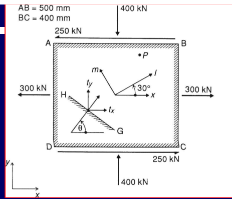
$\sigma_l = l_x^2\sigma_x + l_y^2\sigma_y + l_z^2\sigma_z + 2(l_x l_y\tau_{xy} + l_y l_z\tau_{yz} + l_x l_z\tau_{xz})$

$=0.866^2\times15 + 0.5^2\times(-16) + 2\times0.866\times0.5\times(-10)$

$=11.24934 - 4 - 8.66$

$= -1.41$（MPa）

解:



（3）

$\sigma_m = m_x^2\sigma_x + m_y^2\sigma_y + m_z^2\sigma_z + 2(m_x m_y\tau_{xy} + m_{ymz}\tau_{yz} + m_{xmz}\tau_{xz})$

$= (-0.5)^2\times15 + 0.866^2\times(-16) + 2\times(-0.5)\times0.866\times(-10)$

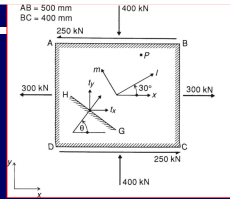
$=3.75 - 11.9993 + 8.66 = 0.41$（MPa）

$\tau_{lm} = l_x m_x\sigma_x + l_y m_y\sigma_y + l_z m_z\sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x)\tau_{xy} + (l_y m_z + l_z m_y)\tau_{yz} + (l_z m_x + l_x m_z)\tau_{xz}$

$=0.866\times(-0.5)\times15 + 0.5\times0.866\times(-16) + [0.866\times0.866 + 0.5\times(-0.5)]\times(-10)$

$=-6.495-6.928-4.99956 = -18.42$

解:



（4）最大主应力：

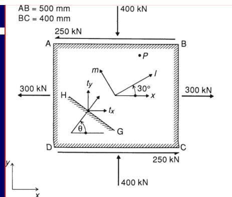
$$\sigma_{1,2} = \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{(15-16)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15-(-16)}{2}\right)^2 + (-10)^2} = 11.34, -12.34$$

最大主应力方向(相对x轴): α_1=20.1°

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{11.34-15}{-10} = 0.366$$

解:



（5）当θ=0° 时：λ_x=1，λ_y=0，λ_z=0

$t_x = \sigma_x\lambda_x + \tau_{xy}\lambda_y + \tau_{zx}\lambda_z = 15$（MPa）

$t_y = \tau_{xy}\lambda_x + \sigma_y\lambda_y + \tau_{yz}\lambda_z = -10$（MPa）

当θ=60° 时：λ_x=0.5，λ_y=0.866，λ_z=0

$t_x = \sigma_x\lambda_x + \tau_{xy}\lambda_y = 15\times0.5 - 10\times0.866 = -1.16$（MPa）

$t_y = \tau_{xy}\lambda_x + \sigma_y\lambda_y = -10\times0.5 - 16\times0.866 = -18.856$（MPa）

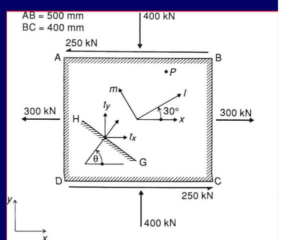
$t = (t_x^2 + t_x^2)^{1/2} = 18.89$（MPa）

解:

（5）当θ=90° 时：λ_x=0，λ_y=1，λ_z=0

$t_x = \sigma_x\lambda_x + \tau_{xy}\lambda_y = -10$（MPa）

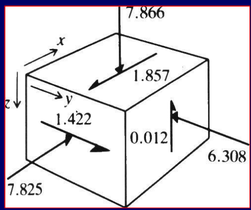
$t_y = \tau_{xy}\lambda_x + \sigma_y\lambda_y = -16$（MPa）



作业1：

如图中所示的单位割离体，在正六面体的可见面上，作用有平行于给定参考轴方向的应力分量。

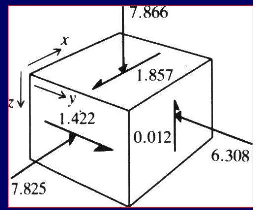
（1）填写所需的应力分量使割离体图形完整，确定x，y，z坐标系中的六个应力分量。



（2）l，m，n参照轴相对于x，y，z的方向余弦由下式确定：

$$(l_x, l_y, l_z) = (0.281,\ 0.597,\ 0.751)$$
$$(m_x, m_y, m_z) = (0.844,\ 0.219,\ -0.490)$$
$$(n_x, n_y, n_z) = (-0.457,\ 0.771,\ -0.442)$$

作业1：（续）

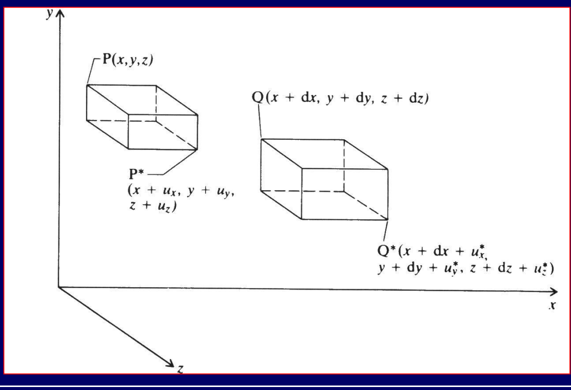


（2）试写出σ_m，τ_{n1}相对于x，y，z的应力分量和方向余弦的表达式，并计算它们各自的值。

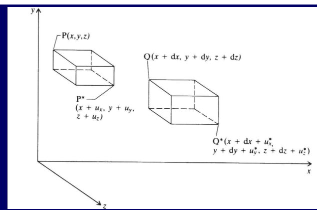
（3）根据上面（1）中建立的应力分量，计算应力不变量I_1、I_2、I_3，写出应力矩阵的特征方程。并求出各主应力值和相对于x，y，z轴的方向角。

（4）证明主应力方向形成一组相互正交的轴。

2.6 位移和应变



2.6 位移和应变



$$u_x^* = u_x + du_x，\ 式中\ du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz$$

$$u_y^* = u_y + du_y，\ 式中\ du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}dx + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy + \frac{\partial u_y}{\partial z}dz$$

$$u_z^* = u_z + du_z，\ 式中\ du_z = \frac{\partial u_z}{\partial x}dx + \frac{\partial u_z}{\partial y}dy + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz$$

2.6 位移和应变

位移增量的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$[d\delta] = [D][dr]$$

相对位移的组成：
刚体旋转 + 单元变形

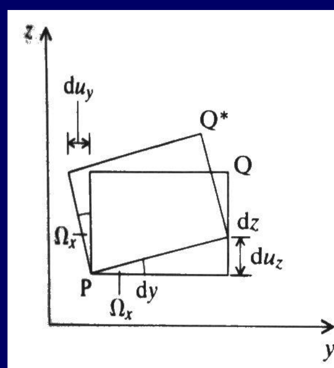
2.6 位移和应变

（1）刚体旋转

绕x轴发生刚体转动Ω_x，对应的Q相对于P的相对位移分量为：

$du_y = -\Omega_x dz$；

$du_z = \Omega_x dy$。



2.7 位移和应变

（1）刚体旋转

Ω_x： $du_y = -\Omega_x dz$；$du_z = \Omega_x dy$

Ω_y： $du_z = -\Omega_y dx$；$du_x = \Omega_y dz$

Ω_z： $du_x = -\Omega_z dy$；$du_y = \Omega_z dx$

$$\begin{aligned} du_x &= -\Omega_z dy + \Omega_y dz \\ du_y &= \quad \Omega_z dx - \Omega_z dz \\ du_z &= -\Omega_y dx + \Omega_x dy \end{aligned}$$

2.7 位移和应变

（1）刚体旋转

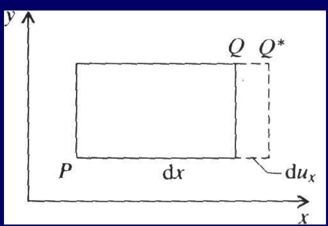
$$\begin{aligned} du_x &= -\Omega_z dy + \Omega_y dz \\ du_y &= \quad \Omega_z dx - \Omega_z dz \\ du_z &= -\Omega_y dx + \Omega_x dy \end{aligned}$$

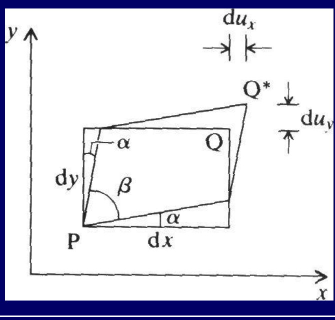
$$\begin{bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$[d\delta'] = [\Omega][dr]$$

2.7 位移和应变

（2）单元变形（伸缩和畸变）



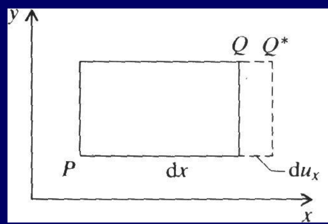


2.7 位移和应变

（2）单元变形（伸缩）

假定dx长度的单元发生均匀拉伸（或压缩）应变，因此，正应变分量用下式计算：

$\varepsilon_x = du_x/dx$



所以，由于正应变引起的相对位移分量为：

$$\begin{aligned} du_x &= \varepsilon_x dx \\ du_y &= \varepsilon_y dy \\ du_z &= \varepsilon_z dz \end{aligned}$$

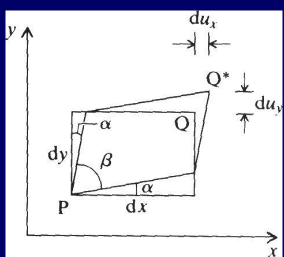
2.6 位移和应变

（2）单元变形（畸变）

在x、y平面内，由于α角小，单元的纯剪应变导致的位移分量可表为：

$du_x = \alpha dy$；$du_y = \alpha dx$

由于剪应变大小由下式确定：



$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \beta = 2\alpha$$

所以，

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} dy \\ du_y &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} dx \end{aligned}$$

2.6 位移和应变

（2）单元变形（畸变）

在y、z平面内：

$$\begin{aligned} du_y &= \frac{1}{2}\gamma_{yz} dz \\ du_z &= \frac{1}{2}\gamma_{yz} dy \end{aligned}$$

在z、x平面内：

$$\begin{aligned} du_z &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} dx \\ du_x &= \frac{1}{2}\gamma_{xz} dz \end{aligned}$$

2.6 位移和应变

（2）单元变形（伸缩+畸变）

$$\begin{aligned}du_x&=\varepsilon_x dx\\ du_y&=\varepsilon_y dy\\ du_z&=\varepsilon_z dz\end{aligned}\quad+\quad\begin{aligned}du_x&=\frac{1}{2}\gamma_{xy}dy\\ du_y&=\frac{1}{2}\gamma_{xy}dx\end{aligned}\quad+\quad\begin{aligned}du_y&=\frac{1}{2}\gamma_{yz}dz\\ du_z&=\frac{1}{2}\gamma_{yz}dy\end{aligned}\quad+\quad\begin{aligned}du_z&=\frac{1}{2}\gamma_{xz}dx\\ du_x&=\frac{1}{2}\gamma_{xz}dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}du_x&=\varepsilon_{xx}dx+\frac{1}{2}\gamma_{xy}dy+\frac{1}{2}\gamma_{zx}dz\\ du_y&=\frac{1}{2}\gamma_{xy}dx+\varepsilon_{yy}dy+\frac{1}{2}\gamma_{yz}dz\\ du_z&=\frac{1}{2}\gamma_{zx}dx+\frac{1}{2}\gamma_{yz}dy+\varepsilon_{zz}dz\end{aligned}$$

2.6 位移和应变

（2）单元变形（伸缩+畸变）

$$\begin{bmatrix}du_x\\ du_y\\ du_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}&\frac{1}{2}\gamma_{xy}&\frac{1}{2}\gamma_{zx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}&\varepsilon_{yy}&\frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}&\frac{1}{2}\gamma_{yz}&\varepsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{bmatrix}$$

$$[d\delta'']=[\varepsilon][dr]$$

2.6 位移和应变

（3）相对位移（刚体旋转+伸缩+畸变）

$$[d\delta]=[d\delta']+[d\delta'']$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x}&\frac{\partial u_x}{\partial y}&\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ \frac{\partial u_y}{\partial x}&\frac{\partial u_y}{\partial y}&\frac{\partial u_y}{\partial z}\\ \frac{\partial u_z}{\partial x}&\frac{\partial u_z}{\partial y}&\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}&\frac{1}{2}\gamma_{xy}&\frac{1}{2}\gamma_{zx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}&\varepsilon_{yy}&\frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}&\frac{1}{2}\gamma_{yz}&\varepsilon_{zz}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\Omega_z&\Omega_y\\ \Omega_z&0&-\Omega_x\\ -\Omega_y&\Omega_x&0\end{bmatrix}$$

2.6 位移和应变

（3）相对位移（刚体旋转+伸缩+畸变）

正应变分量：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_y=\frac{\partial u_y}{\partial y},\ \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

剪应变与转动分量：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xy}&=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x},\ \Omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\ \gamma_{yz}&=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z},\ \Omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \gamma_{xz}&=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x},\ \Omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}$$

2.7 主应变、应变变换、体积应变和偏斜应变

应变变换方程：$[\varepsilon^*]=[R][\varepsilon][R]^T$

体积应变：$\Delta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$

偏斜应变：

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}\varepsilon_x-\Delta/3&\gamma_{xy}&\gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}&\varepsilon_y-\Delta/3&\gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}&\gamma_{yz}&\varepsilon_z-\Delta/3\end{bmatrix}$$

2.8 岩土力学中关于位移、应变和应力的规定

（1）沿坐标轴正方向作用的力和位移分量为正。

（2）收缩正应变取为正。

（3）压缩正应力取为正。

（4）若截面内法线相对于坐标原点向内指，则截面上剪应力方向相对于坐标原点向内为正，反之亦然。

2.8 岩土力学中关于位移、应变和应力的规定